Відкрита олімпіада з математики для учнів 5–7 класів

«Замість того, щоб сердитися на навколишній світ,
було б розумніше набратися мужності діяти».
Вольтер

Розв'язання завдань

5 клас

1. На столі лежать 9 карток, на яких написані різні натуральні числа від 1 до 9. Петрик та Василь по черзі (починає Петрик) беруть по одній картці зі стола. Перемагає той, хто першим зможе утворити зі своїх карток та знаків арифметичних дій $(+, -, \times, :)$ вираз, значення якого дорівнюватиме 12. Якщо по завершенні гри такого виразу не зможе утворити ні Петрик, ні Василь, то гра завершується нічиєю. Хто з гравців може перемогти, якщо кожний з них прагне перемогти? Відповідь обґрунтуйте.

Відповідь: Петрик.
Розв'язання. Своїм першим ходом Петрик вибирає картку з числом 3. Тепер якщо Василь вибирає картку з числом 4, то Петрик вибирає картку з числом 9 та отримує вираз $3 + 9 = 12$. Якщо ж Петрик не бере число 4, то Петрик другим ходом вибирає число 4 та отримує вираз $3 \times 4 = 12$.

2. В Ордені Фенікса 40 чарівників. Щоночі троє чергують і несуть варту. Чи можна організувати ці чергування так, щоб через деякий час кожен чергував разом з кожним іншим рівно один раз? Відповідь обґрунтуйте.

Відповідь: ні.
Розв'язання. Нехай А – чарівник з Ордену Фенікса. Він хоче стояти на варті один раз з кожним з інших 39 чарівників. Це неможливо, тому що 39 – непарне число, і під час чергування А стоїть на варті рівно з двома попарно різними чарівниками.

3. Фігура, що зображена на малюнку, основу якої складають два однакові квадрати, має периметр 88. Пунктирний відрізок має довжину 4. Чому дорівнює сторона квадрата? Відповідь обґрунтуйте.



Малюнок

Відповідь: 12.
Розв'язання.(1 спосіб розв'язування)

Пери Периметр фігури складається з периметрів двох квадратів без подвоєної довжини пунктирної лінії. Тому сума периметрів обох квадратів дорівнює 88+2*4=96. Тоді периметр одного квадрата становить: 96:2=48, а сторона квадрата дорівнює 48:4=12.

Розв'язання.(2 спосіб розв'язування)
Позначимо сторону квадрата через a. Тоді периметр фігури складається з 6 відрізків довжини a та двох менших відрізків, довжини $a - 4$. Тоді можемо скласти таку рівність:

$$88 = 6a + 2 \cdot (a - 4) \Rightarrow 8a = 96 \Rightarrow a = 12.$$

4. На вечірці зібралися 5 дітей. Один з них ненавмисно розбив стакан, і усі діти бачили, хто це зробив. Дорослі стали опитувати дітей про це. Але якщо хтось з дітей бреше, то наступній дитині стає соромно за це, і вона каже правду. Ось, що сказали діти по черзі.
Андрій: «Василь та я не робили цього».

Богдана: «Це зробив Василь або Грицько».
Василь: «Дарина та я не робили цього».
Грицько: «Андрій зробив це».
Дарина: «Щонайменше двоє з усіх, хто казав до мене, збрехали».
З'ясуйте за цими даними, хто з дітей розбив стакан? Вкажіть усі можливі відповіді та обґрунтуйте їх.

Відповідь: Богдана.
Розв'язання. Розглянемо 5 випадків, коли послідовно винним є кожна дитина. Випишемо послідовність відповідей дітей, до отримання суперечності з умовою. Позначимо хибне твердження через «Х» та правдиве – через «П»:
Якщо винний Андрій, то ХХ – суперечність.
Якщо винна Богдана, то ПХПХП – немає суперечності.
Якщо винний Василь, то ХПХХ – суперечність.
Якщо винний Грицько, то ППППХХ – суперечність.
Якщо винна Дарина, то ПХХ – суперечність.

5. Чи можна розставити числа $1, 2, ..., 9$ по колу таким чином, щоб сума кожних двох сусідніх не ділилася ні на 3, ні на 5, ні на 7? Відповідь обґрунтуйте.

Відповідь: так, наприклад, таким чином: $1 - 3 - 8 - 5 - 6 - 2 - 9 - 4 - 7 - 1$.
Розв'язання. Для того, щоб отримати вказану відповідь, достатньо спочатку виписати усі пари чисел, які можуть стояти поруч: для кожної цифри є свій набор цифр.

$$1 - 3, 7;\ 2 - 6, 9;\ 3 - 1, 5, 8;\ 4 - 7, 9;\ 5 - 3, 6, 8;$$
$$6 - 2, 5, 7;\ 7 - 1, 4, 6, 9;\ 8 - 3, 5, 9;\ 9 - 2, 4, 7, 8.$$

Далі за основу варто взяти числа 1, 2 та 4, для яких сусіди визначаються однозначно.

6 клас

1. *Задача 3 за 5ий клас.*
2. *Задача 4 за 5ий клас.*
3. Марко протягом навчального року писав контрольні роботи з математики. Йому залишилося написати лише одну. Марко підрахував, що якщо за останню контрольну він отримає 12 балів, то його середній бал за всі роботи становитиме 10, а якщо отримає 7 балів - середній бал становитиме 9. Скільки контрольних робіт Марко вже написав? Відповідь обґрунтуйте.

Відповідь: 4.
Розв'язання. Нехай до останньої контрольної Марко вже написав n-1 робіт, за які сумарно отримав S балів. Тоді за умовою задачі маємо: S + 12 = 10n, S + 7 = 9n. Віднімемо друге рівняння від першого: 12 − 7 = 10n − 9n, звідки n = 5. Отже, до останньої контрольної Марко вже написав 5 − 1 = 4 роботи.

4. Знайдіть усі такі натуральні числа N, які мають рівно 3 дільники (включаючи самого себе та 1), сума яких дорівнює 183. Відповідь обґрунтуйте.

Відповідь: 169.
Розв'язання. Зауважимо, що три дільники може мати тільки квадрат натурального числа. Справді, якщо число N має дільник a, то дільником також буде N/a, тобто ми завжди будемо мати пари дільників. Аби їх було рівно 3, потрібно аби $a = N/a$, тобто наше число N - квадрат натурального числа. Залишається зрозуміти, яким воно може бути. Простим підбором знаходимо, що число 169. Далі зрозуміло, що менші квадрати натуральних чисел мають меншу суму дільників, а більші – більшу, тому знайдений розв'язок – єдиний.

5. Василь формує групи чисел. Кожна група складається з 5 різних чисел. Будь-яке число може потрапляти до декількох груп. Для кожних двох груп існує рівно 4 числа, що входять в обидві групи. Якщо в усіх групах разом є рівно 7 різних чисел, то яку найбільшу кількість груп можна утворити? Відповідь обґрунтуйте.

Відповідь: 3.
Розв'язання. Можна утворити 3 такі групи чисел: $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $\{1, 2, 3, 4, 6\}$ та $\{1, 2, 3, 4, 7\}$.
Припустимо, що вдалося утворити принаймні 4 такі групи. Без обмеження загальності вважатимемо, що перші дві такі групи – це $A = \{a, b, c, d, e\}$ та $B = \{a, b, c, d, f\}$. Оскільки усього в кожній групі 7 чисел, то деяка група, позначимо її через C, має містити цей сьомий елемент g. Тоді вона має мати вигляд $C = \{a, b, c, d, g\}$. Будь яка інша група, що не містить g, має містити числа a, b, c, d, щоб бути відмінним від груп A та B має містити інше число h, а тому таких різних чисел стає вже мінімум 8, що суперечить умові. З аналогічних міркувань, наступна група має містити і e, і f, а тому не буде мати 4 спільні числа з A та B. Таким чином 4-х таких груп не може існувати.

7 клас

1. Петрик формує групи чисел. Кожна група складається з 5 різних чисел. Будь-яке число може потрапляти до декількох груп. Для кожних двох груп існує рівно 4 числа, що входять в обидві групи. Якщо в усіх групах разом є рівно 6 різних чисел, то яку найбільшу кількість груп можна утворити?

Відповідь: 6.
Розв'язання. Можна утворити 6 за принципом – з 6 чисел прибираємо по черзі по одному числу ((1,2,3,4,5); (1,2,3,4,6); (1,2,3,5,6); (1,2,4,5,6); (1,3,4,5,6); (2,3,4,5,6)). Доведемо що більше неможливо: Розглянемо довільну групу (1,2,3,4,5) ми можемо створити рівно 5 нових груп змінюючи по черзі одне з чисел на 6, тому більше ніж 6 груп створити неможливо.

2. Петрик вирішив провести декілька прямих через деяку фіксовану точку P на площині таким чином, щоб між кожними двома прямими кут був не менше $13°$. Яку найбільшу кількість прямих він зможе так провести? Відповідь обґрунтуйте.

Відповідь: 13.
Розв'язання. Проведемо 13 прямих, щоб між кожними сусідніми був кут $13°$, тобто між 1-ю та 2-ю, між 2-ю та 3-ю, …, між 12-ю та 13-ю. тоді кут між 13-ю та 1-ю буде кут $180° - 12 \cdot 13° = 24°$. Припустимо, що ми змогли провести таких 14 прямих. Оскільки $14 \cdot 13° = 182° > 180°$, то між деякими двома має бути кут менший від $13°$.

3. Відомо, що дійсні числа a, b, c, d задовольняють умову: $a < b < c < d$. Розставте в порядку зростання числа $x = ab + cd$, $y = bc + ad$ та $z = ac + bd$. Відповідь обґрунтуйте.

Відповідь: $y < z < x$.
Розв'язання. Покажемо, що $y < z < x$.
Розглянемо різниці

$$z - y = ac + bd - bc - ad = a(c - d) + b(d - c) = (b - a)(d - c) > 0,$$

оскільки ми маємо добуток двох додатних чисел.

$$x - z = ab + cd - ac - bd = a(b - c) + d(c - b) = (d - a)(c - b) > 0,$$

знову маємо добуток двох від'ємних чисел.

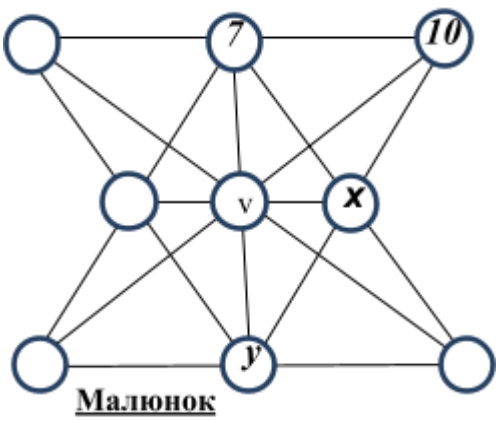
4. У кожному колі записане деяке число таким чином, що сума трьох чисел у колах, що лежать на одній прямій, однакова. Відомі числа, що розташовані у двох колах (Малюнок). Які числа можуть бути записані у колах, що позначені x та y? Відповідь обґрунтуйте.

Відповідь: $x = 4, y = 7$.

Розв'язання. Складемо послідовно співвідношення, яким мають задовольняти числа в колах (рис. 6). Сума чисел по кожній лінії має дорівнювати $S = 10 + x + y$. Тому у правому нижньому куті стоїть число $S - 7 - x = y + 3$, у центральному полі $S - 7 - y = S = 3 + x$. У лівому нижньому $S - 10 - (3 + x) = y - 3$. Таким чином з нижнього рядка отримуємо, що

$$S = 10 + x + y = 3y \Rightarrow x = 2y - 10 \Rightarrow S = 3y.$$

Тоді у середньому рядку ліворуч маємо мати число $S - 10 - (3 + x) = 2y - 4$. Остаточно з центрального горизонтального ряду знаходимо, що $S = 3y = 2x + 2y - 1 = 6y - 21 \Rightarrow y = 7 \Rightarrow x = 4$.



Малюнок

5. У деякому порядку записані натуральні чисал 1, 2, …, 8. Чи може виявитися так, що сума перших k записаних чисел ділиться націло на суму інших $n - k$ записаних чисел, або навпаки, ділить націло її для кожного $k = 1, 2, ..., 7$? Тобто, перше число ділиться націло на суму інших 7 чисел, або сума інших 7 чисел ділиться на перше число, сума 1-го та 2-го числа ділиться націло на суму інших 6 чисел, або сума інших 6 чисел ділиться на суму 1-го та 2-го числа і так далі.

Відповідь: ні.

Розв'язання. Нехай шукані 8 чисел, що задовольняють умову, позначені через a_1, … a_8. Якщо сума перших k чисел ділить суму решти $n - k$ чисел, то ця сума перших k чисел ділить і суму усіх n чисел, тобто число $1 + 2 + ... + 8 = 36$. Аналогічно, якщо сума останніх k чисел ділить суму решти $n - k$ чисел, то ця сума останніх k чисел ділить і 36.

При цьому число 36 ділиться націло на числа 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18 та 36. Припустимо, що шуканий список з 8 перших чисел існує, поділимо його навпіл, тоді список розбитий на дві четвірки чисел. Одна з таких сум має давати ділили число 36. Найменша можлива сума – це $1 + 2 + 3 + 4 = 10$, тому цей дільник може дорівнювати або 12, або 18. Зрозуміло, що якщо числа a_1, … a_8 задовольняють умову, то умову задовольняють і числа a_8, … a_1. Тому надалі вважаємо, що дільником є перша сума, тобто a_1, … a_4.

Якщо та сума дорівнює 12, тобто $a_1 + ... + a_4 = 12$, тому її утворюють лише числа $1 + 2 + 3 + 6$ або $1 + 2 + 4 + 5$, інших варіантів не існує.

Для першого випадку $\{a_1, a_2, a_3, a_4\} = \{1, 2, 3, 6\}$. Тоді знайти шукане значення a_5, для якого $a_1 + ... + a_5$ або $a_6 + a_7 + a_8$ ділить число 36, не можливо. Для суми $a_1 + ... + a_5$ має бути $a_5 = 6$, що неможливо. Для суми $a_5 + ... + a_8 = 4 + 5 + 7 + 8 = 24$ ми так само не зможемо підібрати a_5, щоб $a_6 + a_7 + a_8$ стало 36.

Якщо $\{a_1, a_2, a_3, a_4\} = \{1, 2, 4, 5\}$, то виставити їх в ряд, щоб задовольнялися умови, тобто кожна сума була дільником 36, неможливо.

Нехай тепер сума $a_1 + ... + a_4 = 18$. Тоді $a_1 + a_2 + a_3$ ділить число 36, звідки $a_4 = 6$. Але аналогічно з умови $a_5 + ... + a_8 = 18$ випливає, що $a_6 + a_7 + a_8$ ділить число 36, а тому $a_5 = 6$. Одержана суперечність завершує доведення.