

# Олімпіада з математики. Розв'язки

## 1 5 клас.

**5.1** У сім'ї татові Віталію 41 рік, а трьом синам, Вадиму, Василю та Віктору - 13, 10 і 6 років. Через скільки років вік тата дорівнюватиме сумі віків трьох його синів? *Обґрунтуйте Вашу відповідь.*

*Відповідь:* 6 років. Нехай пройшло  $x$  років. Тоді вік тата -  $41 + x$ , а трьох синів -  $13 + x$ ,  $10 + x$ ,  $6 + x$ . За умовою  $x + 41 = x + 13 + x + 10 + x + 6$ . Тоді  $2x = 41 - 13 - 10 - 6 = 12$ , і відповідно пройшло  $x = 6$  років.

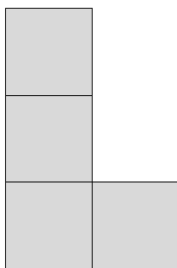
**5.2** Женя набирає текст зі швидкістю 99 символів на хвилину, роблячи при цьому помилку в кожному третьому рядку. Текст для газети Женя набрав за 20 хвилин. Скільки помилок буде в тексті, якщо один рядок вміщує рівно 66 символів? *Обґрунтуйте Вашу відповідь.*

*Відповідь:* 10 рядків. За 20 хвилин Женя набрав  $99 \cdot 20 = 1980$  символів. Оскільки один рядок вміщує 66 символів, то всього було набрано  $1980 : 66 = 30$  рядків. За умовою, помилка є в кожному третьому рядку. Отже, помилки будуть у рядках 3, 6, 9, ..., 30. Кількість таких рядків дорівнює  $30 : 3 = 10$ .

**5.3** Якщо брехунець каже правду, то він забарвлюється в зелений колір. А якщо бреше - забарвлюється в червоний. Одного разу зустрілися двоє таких брехунців. Перший сказав: «Ми двоє червоні». Потім другий сказав: «От якби ти промовчав, ми б зараз двоє були червоні». Чи однакового кольору виявилися тепер брехунці? *Обґрунтуйте Вашу відповідь.*

*Відповідь:* Так. Припустимо, що брехунці спочатку були червоними. Тоді перший брехунець сказав правду і став зеленим. Правдивим у такому разі є і твердження другого брехунця, адже вони вже були червоними, тож він теж стає зеленим, а отже вони стали однакового кольору. Тепер припустимо що бодай один з них був зелений. Тоді перший збрехав і став червоним. Другий теж збрехав, адже бодай один з них був зеленим, і теж відповідно став червоним, одного кольору з першим. Тож у будь-якому разі вони стали одного кольору.

**5.4** Чи існує прямокутник, який можна закласти куточками  $3 \times 1$  як на Мал.1 (їх можна повертати та можна віддзеркалювати; головне, що має бути три клітинки разом та одна вбік) в один шар без накладань, але такий, що його не можна закласти таким чином квадратами  $2 \times 2$ ? *Обґрунтуйте Вашу відповідь.*



Мал. 1

*Відповідь:* Так, існує, наприклад, прямокутник  $3 \times 8$  (Мал. 2). Його можна закласти куточками,

але неможливо квадратами  $2 \times 2$ , адже одна зі сторін має довжину 3, а тому якщо поставити квадрат  $2 \times 2$  він займе 2 з 3 рядочків і неможливо закласти рядочок, що залишився.



Мал. 2

**5.5** Числа від 1 до 25 розставлені в клітинках квадрата  $5 \times 5$  так, що кількість непарних чисел у будь-яких двох рядках різна. Чи може виявитися, що кількість непарних чисел у будь-яких двох стовпцях теж різна? *Обґрунтуйте Вашу відповідь.*

*Відповідь:* Ні, це неможливо. Зауважимо, що кількість непарних чисел може бути 0, 1, 2, 3, 4, 5, і сумарно їх має бути 13 (кількість непарних чисел від 1 до 25). Якщо в нас немає рядка в якому немає непарних чисел, тоді ми точно маємо рядки з 1, 2, 3, 4, 5 непарними числами і тоді сумарно їх 15, що неможливо. Якщо немає рядка, який весь складається з непарних чисел, тоді ми маємо точно рядки з 0, 1, 2, 3, 4 непарними числами, і тоді сумарно їх 10, що теж неможливо. Отже, ми маємо рядок, де всі числа непарні, і рядок, де всі числа парні (немає непарних). Якщо існує така ж розбивка для стовпчиків, то ми теж повинні мати пустий стовпчик, але це неможливо, бо є рядочок з усіма непарними числами, отже кожен стовпчик має бодай одне непарне число, отримуємо суперечність.

## 2 6 клас.

**6.1** Серед чисел  $a + b$ ,  $a - b$ ,  $\frac{a}{b}$  та  $ab$  два додатних і два від'ємних ( $a \neq 0$ ,  $b \neq 0$ ). Визначте знак числа  $b$ . *Обґрунтуйте Вашу відповідь.*

*Відповідь:*  $b$  - від'ємне. Зауважимо, що  $\frac{a}{b}$  та  $ab$  одного знаку (дійсно достатньо перебрати всі варіанти:  $a > 0, b > 0$ ,  $a < 0, b > 0$ ,  $a < 0, b < 0$ ,  $a > 0, b < 0$ ). Тоді за умовою  $a + b$  та  $a - b$  теж одного знаку. Нехай  $\frac{a}{b}$  та  $ab$  - додатні. Тоді  $a + b$  та  $a - b$  - від'ємні, а отже їхня сума, тобто  $2a$  теж, тобто  $a$  від'ємне. З того, що  $ab$  додатне та  $a$  від'ємне виходить, що  $b$  від'ємне. Тепер нехай  $\frac{a}{b}$  та  $ab$  - від'ємні. Тоді  $a + b$  та  $a - b$  - додатні, а отже їхня сума, тобто  $2a$  теж, тобто  $a$  додатне. З того, що  $ab$  від'ємне та  $a$  додатне виходить, що  $b$  від'ємне.

**6.2** Знайдіть площу прямокутника на Мал.3, якщо його периметр дорівнює 34 см і він складений з квадратів. *Обґрунтуйте Вашу відповідь.*



Мал. 3

*Відповідь:*  $66(\text{см}^2)$ . Нехай сторона найменшого квадрата ліворуч -  $2x$ . Тоді ліва (менша) сторона прямокутника -  $6x$  (три квадрати). Тоді сторона середнього квадрата -  $3x$ , а сторона найбільшого -  $6x$ . Отже, нижня (більша) сторона прямокутника -  $11x$ . Тоді периметр  $11x + 11x + 6x + 6x = 34x = 34$ , отже  $x = 1(\text{см})$ . Тоді, площа  $6x * 11x = 66(\text{см}^2)$ .

**6.3** Матвійко знає лише двоцифрові та одноцифрові числа. Він хоче виписати на дошці декілька чисел в ряд таким чином: кожне наступне число має бути менше ніж попереднє, а сума цифр кожного наступного числа має бути не меншою ніж в попереднього. Яку найбільшу кількість чисел зможе виписати Матвійко? Наведіть цей ряд. *Обґрунтуйте Вашу відповідь.*

*Відповідь:* 10 чисел: 90, 81, 72, 63, 54, 45, 36, 27, 18, 9. Доведемо, що в ряду не може бути більше 10 чисел. Розглянемо два двоцифрових числа з однаковим десятком,  $\overline{ab}$  та  $\overline{ac}$ . Звернемо увагу, що за умовою неможливо аби вони обоє були в ряду Матвійка, адже якщо  $\overline{ab} > \overline{ac}$ , то  $b > c$  і отже сума цифр  $\overline{ab}$  більша за суму цифр  $\overline{ac}$ , що суперечить умові. Тому з кожного десятка

Матвійко може мати максимум одне число в ряду, те саме стосується одноцифрових чисел. Тобто, максимум таких стільки, скільки десятків, тобто 10.

**6.4** На вечірку прийшло 100 людей. Організатори помітили, що серед будь-яких 50 із них є хоча б двоє з однаковим ім'ям. Доведіть, що на вечірці обов'язково знайдуться троє людей з однаковим ім'ям. *Обгрунтуйте Вашу відповідь.*

*Відповідь:* Припустимо таких трьох людей немає. Тоді нехай  $x$  людей мають унікальне ім'я, та  $2y$  ділять своє ім'я з іншою людиною. Тоді  $x + 2y = 100$ . Зауважимо, що  $x + y < 50$ , інакше оберемо будь-які 50 людей з цієї компанії, хто має унікальні імена та по одній людині з тих, хто ділять ім'я з кимось іншим (всі матимуть в групі унікальні), і умова не буде виконуватись. Тому з рівності  $x + 2y = 100$  та нерівності  $x + y < 50$  виходить, що  $y > 50$ , що суперечить, адже  $x + y < 50$ .

**6.5** У Петрика є 12 гир, всі різної ваги. За одне зважування на терезах можна дізнатися про будь-які три гири: яка серед них найважча, яка середня та яка найлегша. Чи зможе Петрик за 7 зважувань знайти найважчу гирю та другу за вагою гирю? *Обгрунтуйте Вашу відповідь.*

*Відповідь:* Так, зможе. Розіб'ємо гири на чотири групи по три гири та першими 4 зважуваннями знайдемо першу, другу та третю за вагою гири у кожній групі. Позначимо  $A, B, C$  та  $D$  гири, які виявилися найважчими у групах. Зрозуміло, що найважча гиря це одна з них. П'ятим зважуванням порівняємо гири  $A, B, C$ . Нехай для визначеності ваги гирь впорядковані так:  $m_A > m_B > m_C$ . Шостим зважуванням порівняємо гири  $A, B$  та  $D$ . Оскільки ми вже знаємо, що  $m_A > m_B$ , результати можуть бути лише такими:

1)  $m_A > m_B > m_D$ . У цьому випадку найважча гиря це  $A$  а друга за вагою – або  $B$ , або гиря, яка була другою у групі з гирею  $A$ .

2)  $m_A > m_B > m_D$ . У цьому випадку найважча гиря це  $A$ , а друга за вагою – або  $D$ , або гиря, яка була другою у групі з гирею  $A$ .

3)  $m_D > m_A > m_B$ . У цьому випадку найважча гиря це  $D$ , а друга за вагою – або  $A$ , або гиря, яка була другою у групі з гирею  $D$ .

У кожному з випадків сьоме зважування дозволяє знайти другу за вагою гирю.

### 3 7 клас.

**7.1** Андрій похвалився, що придумав трицифрове натуральне число з дивовижною властивістю: якщо закреслити будь-яку одну з його цифр, то число, що залишиться, буде точним квадратом. Чи не помилився Андрій? *Обгрунтуйте Вашу відповідь.*

*Відповідь:* Так, він помилився. Зауважимо, що всі двоцифрові квадрати це 16, 25, 36, 49, 64, 81. Якщо число Андрія  $\overline{abc}$ , то закресливши  $b$  ми отримаємо, що  $\overline{ac}$  квадрат, а якщо  $c$ , то  $\overline{ab}$ . Зауважимо, що серед квадратів немає двох таких, які починаються на одну цифру, але завершуються різними, отже  $b = c$ . Закресливши  $a$ , отримуємо, що  $\overline{bc} = \overline{cc}$  квадрат, що неможливо, бо такого квадрату не існує.

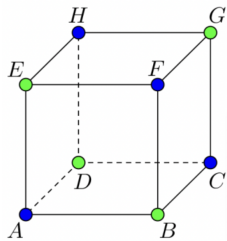
**7.2** Задача 6.4.

**7.3** На дошці було записано 100 чисел. Коли кожне з них збільшили на 1, сума квадратів чисел на дошці не змінилася. Потім кожне число ще раз збільшили на 1. Чи зміниться сума квадратів на цей раз і якщо так, то на скільки? *Обгрунтуйте Вашу відповідь.*

*Відповідь:* Зміниться на 200. Нехай на дошці були числа  $x_1, x_2, \dots, x_{100}$ . Якщо число  $x$  замінили на  $x + 1$ , а потім на  $x + 2$ , то квадрат числа змінився спочатку на  $(x + 1)^2 - x^2 = 2x + 1$ , а потім на  $(x + 2)^2 - (x + 1)^2 = 2x + 3$ . Тому першого разу сума квадратів усіх чисел змінилася на  $(2x_1 + 1) + \dots + (2x_{100} + 1) = 2(x_1 + \dots + x_{100}) + 100$ , а другого разу на  $(2x_1 + 3) + \dots + (2x_{100} + 3) = 2(x_1 + \dots + x_{100}) + 300$ . За умовою  $2(x_1 + \dots + x_{100}) + 100 = 0$ , тому  $2(x_1 + \dots + x_{100}) + 300 = 200$ . Отже, другого разу сума квадратів збільшиться на 200.

**7.4** В одній із вершин куба сидить муха. Павук за один крок може перевірити три вершини куба. Якщо муха знаходиться в одній із цих вершин, павук її ловить. Інакше муха перелітає в одну із сусідніх вершин, і все повторюється. Доведіть, що павук гарантовано може спіймати муху за скінченну кількість кроків.

*Відповідь:* Пофарбуємо та позначимо вершини куба, як показано на Мал. 4. Кожного разу муха перелітає у вершину іншого кольору. Нехай першим кроком павук перевірить вершини  $C, F, H$ . Якщо спочатку муха була у синій вершині, то або павук одразу її спіймає, або муха була у вершині  $A$  і перелетіла в одну з вершин  $B, D, E$ . Другим кроком павук перевірить ці три вершини. Якщо муху досі не спіймано, то спочатку вона була у зеленій вершині і тепер знову знаходиться у зеленій вершині. Третім кроком павук перевірить вершини  $B, D, E$ , а четвертим – вершини  $C, F, H$ . Щонайбільше після четвертого кроку муху буде спіймано.

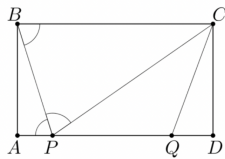


Мал. 4

**7.5** Нехай  $ABCD$  - прямокутник. На стороні  $AD$  знайшлися такі точки  $P$  та  $Q$ , що  $PC = BC$  та  $PQ = CQ$ . Доведіть, що  $\angle PCQ = 2\angle ABP$ .

*Відповідь:* Позначимо  $\angle APB = \alpha$  (Мал. 5). Тоді  $\angle PBC = \angle APB = \alpha$ , бо  $AD \parallel BC$ , та  $\angle BPC = \angle PBC = \alpha$ , бо трикутник  $BPC$  рівнобедрений. Тому  $\angle ABP = 90^\circ - \alpha$ , а у рівнобедреному трикутнику  $PCQ$

$$\angle PCQ = \angle CPQ = 180^\circ - \angle APB - \angle BPC = 180^\circ - 2\alpha = 2\angle ABP.$$



Мал. 5