

Відкрита олімпіада з математики для учнів 5–7 класів

«Прагніть не до успіху, а до цінностей, які він дає».

Альберт Ейнштейна

Умови та розв'язання завдань

6 клас

1. Петрик виписав усі числа від 1 до 1000000, які діляться на 7. Після цього замість кожного виписаного числа він записав суму його цифр. Яке найменше число виписане на дошці?

Відповідь: 2.

Розв'язання. Число 1 не може бути виписаним, оскільки це б означало, що одне з чисел 1, 10, ..., 1000000 ділиться націло на 7, що неможливо.

Знайдемо число з сумою цифр 2, що кратне 7. Зрозуміло, що це має бути число вигляду 10 ... 01. Неважко пересвідчитися, що число $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$ умову задовольняє.

2. Піраміда побудована з 10 цеглин різної ваги, як це показано на рис. 3. На деяких вага написана і відомо, що вага цеглини кожного ряду, окрім нижнього, дорівнює сумі ваг двох цеглин, на які вона спирається. Чому дорівнює вага цеглини, що позначена літерою x ?

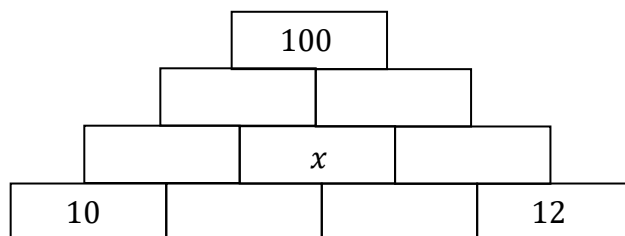


Рис. 3

Відповідь: 26.

Розв'язання. Позначимо ваги цеглин в нижньому рядку через a та b зліва направо (тих, чия вага невідома). Тоді у другому знизу рядку зліва направо вага цеглин дорівнює відповідно: $10 + a$, $a + b = x$ та $b + 12$. Аналогічно вага цеглин у третьому рядку знизу складає зліва направо $10 + 2a + b$, $a + 2b + 12$. І нарешті вага верхньої цеглини мала дорівнювати $3a + 3b + 22 = 100$. З останньої рівності знаходимо остаточно, що $x = a + b = (100 - 22) : 3 = 26$.

3. Шестеро дітей – Анастасія, Богдан, Василь, Дарина, Євген та Оксана сиділа в цьому порядку на лавці. Анастасія та Богдан записали кожний на своєму папірці деяке натуральне число. Василь подивився на їхні числа і записав на своєму папірці суму чисел Богдана та Анастасії. Після цього Дарина записала на своєму папірці суму чисел Василя та Богдана. Євген написав суму чисел Дарини та Василя. І нарешті Оксана записує на своєму папірці суму чисел Євгена та Дарини. Чому дорівнює сума чисел, що записані на усіх шести папірцях, якщо Євген написав на своєму число 19?

Відповідь: 76.

Розв'язання. Послідовно випишемо ті числа, які записали на своїх папірцях діти. Нехай Анастасія написала a , а Богдан написав число b , тоді далі були записані такі числа: Василь записав $a + b$, Дарина – число $a + 2b$, Євген записав $2a + 3b$ та Оксана – число $3a + 5b$. Сума усіх записаних чисел дорівнює

$$8a + 12b = 4(2a + 3b) = 4 \cdot 19 = 76.$$

4. Петрик, Василь та Грицько говорять про деякі властивості двоцифрового натурального числа n . Кожен з них висловлює два твердження, але, будучи дещо слабким у математиці, у кожного одне істинне та одне хибне твердження.

Петрик каже: « n – парне», « n кратне 3».

Василь додає: « n кратне 3», «остання цифра числа n дорівнює 5».

Грицько робить висновок: « n кратне 5», «сума його цифр дорівнює 12».

Скільки різних значень може приймати n ?

Відповідь: 3.

Розв'язання. Якщо n кратне 3, то в Петрика та Василя є по одному правильному твердженню. Таким чином n є непарним числом з останньою цифрою, що не дорівнює 5. З цих двох тверджень випливає, що n не може бути кратним 5, а тому має суму цифр 12. З чисел, що має суму цифр 12, маємо такі: 39, 48, 57, 66, 75, 84 та 93. З них умову задовольняють такі: 39, 57, та 93.

Якщо n не кратне 3, то воно має бути парним з останньою цифрою 5 – суперечність.

Таким чином шуканих чисел рівно 3.

5. На нескінченній сітці, що складається з квадратиків, Петрик розставляє цифри 1, 2, 3, 4, 5 за таким правилом. Він починає з деякого поля та по спіралі обходить усі поля і числа розставляє строго по черзі у вказаному порядку, після цифри 5 він знову ставить цифру 1 і так далі до нескінченності, як це показано на рис. 8. Яку цифру він помістить у вузол сітки, що розташований лівіше на 20 клітин та вище на 21 клітинку від початкової цифри 1?

Відповідь: 2.

Розв'язання. Треба порахувати шлях, який пройде за стрілочками Петрик від початкового вузла до вказаного. Він спочатку робить 1 крок праворуч, далі 1 крок нагору, далі 2 кроки ліворуч, далі 2 кроки донизу, далі по 3 кроки праворуч та нагору, далі по 4 кроки ліворуч та донизу і так далі.

Щоб дістатися відстані ліворуч на 1 від початкового поля, Петрик має здійснити хід на 2 ліворуч, щоб дістатися відстані ліворуч на 2 від початкового поля, Петрик має здійснити хід на 4 ліворуч, тому, щоб дістатися відстані ліворуч на 20 від початкового поля, Петрик має здійснити хід на 40 ліворуч. Таким чином по горизонталі він зробить разом ходів сумарно на $1 + 2 + \dots + 40 = 820$ кроків.

Аналогічно, щоб дістатися відстані нагору на 1 від початкового поля, Петрик має здійснити хід на 1 нагору, щоб дістатися відстані нагору на 2 від початкового поля, Петрик має здійснити хід на 3 нагору, тому, щоб дістатися відстані ліворуч на 21 від початкового поля, Петрик має здійснити хід на 41 нагору. Таким чином по вертикалі він зробить разом ходів сумарно на $1 + 2 + \dots + 41 = 861$ кроків. Разом буде зроблене 1681 кроків. Далі бачимо, що після кроку типу $5k + 1$ він потрапляє в точку 2.

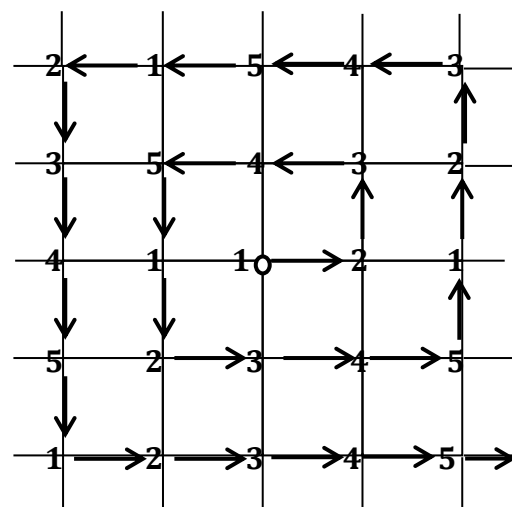


Рис. 8