

Відкрита олімпіада з математики для учнів 5–7 класів

«Прагніть не до успіху, а до цінностей, які він дає».

Альберт Ейнштейна

Умови та розв'язання завдань

5 клас

1. На прямій у деякому порядку розташовані точки A, B, C та D . Відомо, що відстань між точками A та B дорівнює 2, відстань між точками B та C дорівнює 3, та відстань між точками C та D дорівнює 4. Якою може бути відстань між точками A та D ? Вкажіть усі можливі відповіді.

Відповідь: 1, 3, 5 або 9.

Розв'язання. Без обмеження загальності можемо вважати, що точка A розташована лівіше від точки B . Тоді маємо дві можливості розташування точки C по відношенню до точки B . Так само далі маємо два варіанти розташування точки D по відношенню до точки C .

Варіант 1. Точка C правіше від точки B (рис. 1). Тоді можлива відстань між точками A та D може дорівнювати 1 або 9.

Варіант 2. Точка C лівіше від точки B (рис. 2). Тоді можлива відстань між точками A та D може дорівнювати 3 або 5.

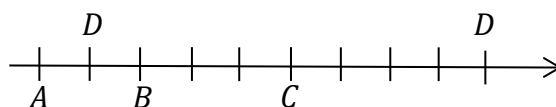


Рис. 1

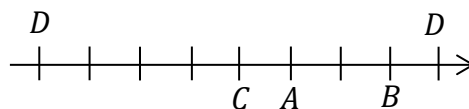


Рис. 2

2. Петрик виписав ребус, де додаються два трицифрових числа з сумою, що є чотирицифровим числом: МАК + ЛАК = ТРАП. Однаковим цифрам відповідають однакові букви, різним – різні. Скільки букв гарантовано відповідають парним цифрам?

Відповідь: 2.

Розв'язання. Всього маємо 7 різних літер (М, А, К, Л, Т, Р, П) та 5 різних непарних цифр. Отже, гарантовано маємо хоча б дві непарні цифри. Покажемо, як побудувати для них приклад: очевидно, оскільки $P = K + K$, що P – парне. Взявши $A = 9$, матимемо потрібні значення у цифрах десятків, якщо візьмемо $K \geq 5$. Тоді перехід через десяток зможе гарантувати непарність цифр М, Р та Л. Оскільки Т – очевидно 1, маємо один із можливих прикладів: $796 + 596 = 1392$.

3. Піраміда побудована з 10 цеглин різної ваги, як це показано на рис. 3. На деяких вага написана і відомо, що вага цеглини кожного ряду, окрім нижнього, дорівнює сумі ваг двох цеглин, на які вона спирається. Чому дорівнює вага цеглини, що позначена літерою x ?

Відповідь: 26.

Розв'язання. Позначимо ваги цеглин в нижньому рядку через a та b зліва направо (тих, чия вага невідома). Тоді у другому знизу рядку зліва направо вага цеглин дорівнює відповідно: $10 + a$, $a + b = x$ та $b + 12$. Аналогічно вага цеглин у третьому рядку знизу складає зліва направо $10 + 2a + b$, $a + 2b + 12$. І нарешті вага верхньої цеглини мала дорівнювати $3a + 3b + 22 = 100$. З останньої рівності знаходимо остаточно, що $x = a + b = (100 - 22) : 3 = 26$.

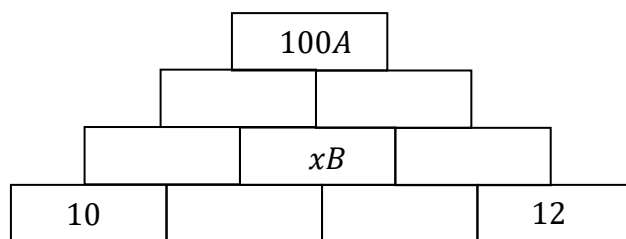


Рис. 3

4. У кожній комірці 1×1 квадрату 5×5 побудована будівля висотою 1, 2, 3, 4 або 5 поверхів. Якщо людина підходить до певної лінії – рядка чи стовпчика, то вона бачить усі будівлі, які не закриті вищими будівлями, та рахує суму поверхів усіх будівель, які вона бачить. Наприклад, вона підходить до лінії, на якій побудовані будівлі такої висоти: 1, 2, 3, 5 та 4 поверхи. Вона бачить перші чотири з них і рахує, що сума складає $1 + 2 + 3 + 5 = 11$. Петрик знав висоти трьох будівель, що позначене на його карті на рис. 4. Його три друга підійшли до трьох ліній і вказали суму поверхів будівель, які вони побачили, як це було наведено в прикладі. Їхні результати також показані на рис. 1. Допоможіть Петрику відновити усю схему, де вказана кількість поверхів у кожній будівлі, якщо відомо, що в кожному рядку та кожному стовпчику є рівно по одній будівлі з кількістю поверхів 1, 2, 3, 4 та 5.

4				
			1	
3				

Arrows and numbers: Top arrow points to row 1 with value 8. Right arrow points to column 5 with value 8. Bottom arrow points to row 5 with value 6.

Рис. 4

Відповідь: відповідь на рис. 7.

Розв'язання. Зрозуміло, що кожний спостерігач бачить найвищу будівлю, тобто в суму видимих поверхів завжди входить число 5. Звідси можемо проаналізувати наведені випадки. $8 = 3 + 5$ або $8 = 1 + 2 + 5$, $6 = 1 + 5$. Таким чином для стовпчика, де сума 6 – найближчі дві будівлі – це 1 та 5 (будемо будівлі позначати кількістю його поверхів) – позначене червоним. Якщо у другому рядку маємо таку рівність: $8 = 1 + 2 + 5$, то оскільки будівля 4 стоїть останньою, то 3 має йти після 5 і заповнення лише таке, як показане на рис. 5 синім кольором і маємо суперечність, бо в третьому стовпчику два числа 5. Таким чином у другому рядку маємо випадок $8 = 3 + 5$. Тут очевидно, що 3 стоїть першим, а між 3 та 5 можуть стояти нуль, одне чи два числа, що лишилися, тобто 1 та 2.

Варіант 1. Між ними два числа, тоді місця для числа 1 не існує.

Варіант 2. Між числами одне число, але тоді число 5 має стояти в третьому стовпчику, що неможливо.

4	3	5	2	1
			1	
		5		
3		1		

Arrows and numbers: Top arrow points to row 1 with value 8. Right arrow points to column 5 with value 8. Bottom arrow points to row 5 with value 6.

Рис. 5

Варіант 3. Між ними немає чисел, тоді маємо ситуацію, як на рис. 6. Числа 1 та 2 виставляються однозначно. Тоді в другому стовпчику можлива лише ситуація $8 = 3 + 5$, бо число 1 стоїть не першим і його видно не буде. Таким чином перше число – це 3. Далі не може стояти 2, бо тоді 5 – буде останнім і буде видно будівлю 4. Тоді після 1 стоїть 5. Тепер однозначно заповнюється до кінця третій стовпчик (рис. 6).

Тепер завершуємо заповнення (рис. 7). Третій рядок – однозначно.

Далі перший стовпчик однозначно.

Далі перший рядок однозначно.

П'ятий стовпчик однозначно.

Решта так само однозначно і маємо шукане заповнення.

4	3	4		
	1	2	5	3
	5	3	1	
		5		
3		1		

Arrows and numbers: Top arrow points to row 1 with value 8. Right arrow points to column 5 with value 8. Bottom arrow points to row 5 with value 6.

Рис. 6

5	3	4	2	1
4	1	2	5	3
2	5	3	1	4
1	4	5	3	2
3	2	1	4	5

Arrows and numbers: Top arrow points to row 1 with value 8. Right arrow points to column 5 with value 8. Bottom arrow points to row 5 with value 6.

Рис. 7

5. Білосніжка збрала не більше 100 яблук і не більше 100 груш. Вона помітила, що якщо вона розкладе яблука в кошики по 12, то залишиться 5 яблук. Якщо вона розкладе яблука в кошики по 15, то все одно залишиться 5 яблук. Також однієї груші не вистачило, щоб розкласти груші в кошики по 10. Знову ж таки, однієї груші не вистачило, щоб розкласти груші в кошики по 16. Скільки яблук і скільки груш збрала Білосніжка?

Відповідь: 65 яблук та 79 груш.

Розв'язання. Нехай кількість яблук a , тоді $a = 12k + 5 = 15n + 5$. Тоді $12k = 15n$ або $4k = 5n$. Найменше значення $k = 5$, тоді $a = 65$. При цьому вже для наступного значення $k = 10$ маємо, що кількість яблук перевищуватиме 100, оскільки тоді $a = 125$.

Нехай кількість груш b , тоді $b = 10m - 1 = 16l - 1$. Тоді $10m = 16l$ або $5m = 8l$. Найменше значення $m = 8$, тоді $a = 79$. При цьому вже для наступного значення $m = 16$ маємо, що кількість яблук перевищуватиме 100, оскільки тоді $b = 159$.