

Олімпіада з математики. Розв'язки

1 7 клас.

7.1 Шестеро дітей – Анастасія, Богдан, Василь, Дарина, Євген та Оксана сиділа в цьому порядку на лавці. Анастасія та Богдан записали кожний на своєму папірці деяке натуральне число. Василь подивився на їхні числа і записав на своєму папірці суму чисел Богдана та Анастасії. Після цього Дарина записала на своєму папірці суму чисел Василя та Богдана. Євген написав суму чисел Дарини та Василя. І нарешті Оксана записує на своєму папірці суму чисел Євгена та Дарини. Чому дорівнює сума чисел, що записані на усіх шести папірцях, якщо Євген написав на своєму число 19? *Обґрунтуйте Вашу відповідь.*

Відповідь: 76. Послідовно випишемо ті числа, які записали на своїх папірцях діти. Нехай Анастасія написала a , а Богдан написав число b , тоді далі були записані такі числа: Василь записав $a + b$, Дарина – число $a + 2b$, Євген записав $2a + 3b$ та Оксана – число $3a + 5b$. Сума усіх записаних чисел дорівнює $8a + 12b = 4(2a + 3b) = 4 \cdot 19 = 76$

7.2 Андрій, Богдан та Володя говорять про деякі властивості двоцифрового натурального числа. Кожен з них висловлює два твердження, але, будучи дещо слабким у математиці, у кожного одне істинне та одне хибне твердження.

Андрій каже: « n – парне», « n кратне 3».

Богдан додає: « n кратне 3», «остання цифра числа n дорівнює 5».

Володя говорить: « n кратне 5», «сума його цифр дорівнює 12».

Скільки різних значень може приймати n ? *Обґрунтуйте Вашу відповідь та переконайтесь, що всі знайдені значення задовольняють умову задачі.*

Відповідь: 3. Якщо n кратне 3, то в Андрія та Богдана є по одному правильному твердженню. Таким чином n є непарним числом з останньою цифрою, що не дорівнює 5. З цих двох тверджень випливає, що n не може бути кратним 5, а тому має суму цифр 12. З чисел, що має суму цифр 12, маємо такі: 39, 48, 57, 66, 75, 84 та 93. З них умову задовольняють такі: 39, 57 та 93. Якщо n не кратне 3, то воно має бути парним з останньою цифрою 5 – суперечність.

7.3 Художник Юрчик хоче провести на площині

а) чотири прямі таким чином, щоб загальна кількість їх точок перетину дорівнювала п'яти;

б) п'ять прямих таким чином, щоб загальна кількість їх точок перетину дорівнювала чотирьом.

Чи вдасться Юрчику здійснити свою мрію? *Обґрунтуйте Вашу відповідь.*

Відповідь: Так. Приклади показаний на рис. 2 (а) та рис. 3 (б).

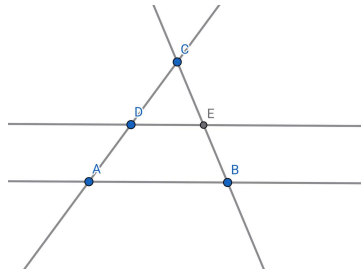


Рис. 2

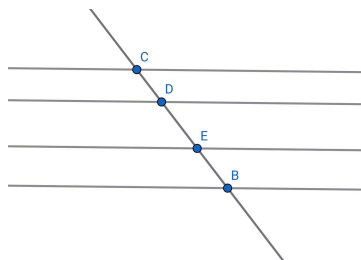


Рис. 3

7.4 Від простого двоцифрового числа відняли число, записане тими ж самими цифрами, але у зворотному порядку, і отримали квадрат натурального числа. Обидва числа (початкове і "перевернуте") є простими. Яким могло бути початкове число?

Відповідь: 73. Нехай початкове число $N = 10a + b$, а перевернуте $M = 10b + a$. Оскільки від N віднімали M і отримали невід'ємний квадрат, маємо $a > b$ і

$$N - M = (10a + b) - (10b + a) = 9(a - b) = k^2.$$

Тоді $a - b$ теж має бути квадратом, оскільки $9 = 3^2$. З урахуванням $1 \leq a - b \leq 9$ маємо $(a - b) \in \{1, 4, 9\}$.

- $a - b = 9 \Rightarrow (a, b) = (9, 0)$, але 90 не є простим і $10b + a$ не двоцифрове — неможливо.
- $a - b = 4$: можливі $(a, b) = (5, 1), (6, 2), (7, 3), (8, 4), (9, 5)$. Серед них лише $(7, 3)$ дає два простих числа: 73 і 37. Тоді $N - M = 73 - 37 = 36 = 6^2$.
- $a - b = 1$: перевірка пар $(2, 1), (3, 2), \dots, (9, 8)$ показує, що принаймні одне з чисел $10a + b$ або $10b + a$ не є простим (парне або кратне 3) - випадків немає.

Отже єдиний можливий варіант - $a = 7, b = 3$, тобто початкове число $N = 73$. Дійсно, 73 і 37 - прості, а $73 - 37 = 36 = 6^2$.

7.5 Чи можна розрізати прямокутник розміром 50×100 на "доміно" й "бантики" (див. рисунок 1) так, щоб доміно і бантиків було порівну? (Фігурки можна повертати.) *Обґрунтуйте Вашу відповідь.*

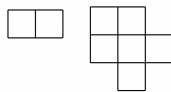


Рис. 1

Відповідь: Ні. Доміно займає 2 клітинки, коли ж бантик 6. Отже, якщо їх має бути порівну (нехай ми маємо x доміно та x бантиків), то сумарно вони покривають $8x$ клітинок. Всього в нас 5000 клітинок (50 на 100), отже кожного виду фігурок $x = \frac{5000}{8} = 625$. Розфарбуємо прямокутник у шахову дошку (чергування білої та чорної клітинки; вийде, що їх однакова кількість, адже 5000 клітинок загалом). Тоді доміно забирає одну білу і одну чорну клітинку, коли ж бантик або 4 білих та 2 чорні, або 4 чорні та 2 білі. Оскільки чорних та білих клітинок однакова кількість загалом, це означає, що на один бантик, який покриває 4 білих та 2 чорні клітинки, має бути один інший з 4 чорними та 2 білими. Отже, їх має бути парна кількість, а ми порахували, що їх має бути 625. Суперечність.