Олімпіада з математики. Розв'язки

1 5 клас.

5.1 Данило має 1 гирьку вагою 1 г, а також набір з 29 гирьок вагою 1 г, 2 г, 3 г, ..., 29 г. Чи може Данило розкласти їх на три купки однакової ваги по 10 гирьок в кожній? *Обгрунтуйте Вашу відповідь.*

Відповідь: Ні, не зможе. Вага всіх гирьок дорівнює $1+\frac{29*30}{2}=1+15*29=436$. Це число не ділиться на 3, отже, неможливо, утворити три групки з однаковою вагою в кожній.

5.2 Знайдіть найменше двоцифрове число, в якого не змінюється сума цифр після множення на 2.*Обгрунтуйте Вашу відповідь.*

Відповідь: 18. Нехай шукане найменше число $A=\overline{ab}$. Будемо шукати його в вигляді $\overline{1b}$, тоді нехай $2\cdot\overline{1b}=\overline{cd}$ і при цьому мають справджуватися рівності: $20+2b=10c+d$ та $1+b=c+d \Rightarrow 19+b=9c$. Щоб справджувалася ця рівність має бути $c\geq 3$. При $c=3$ маємо, що $19+b=27\Rightarrow b=8$ і шукане найменше число дорівнює 18: $18\cdot 2=36$.

5.3 З 6 сірників склали трикутник, який має площу, що дорівнює 4-м площам одиничних трикутників, тобто трикутникам, кожна сторона якого дорівнює 1 (рис. 1). Побудуйте з тих самих 6 сірників фігуру, площа якої дорівнює 6-ти площам одиничних трикутників.

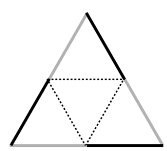

Рис. 1

Відповідь: Приклад показаний на рис. 2.

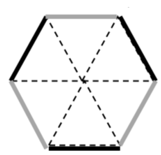

Рис. 2

5.4 Ліцеїсти завжди говорять правду знайомим і говорять неправду незнайомим. Зібралися якось 50 ліцеїстів і кожний сказав кожному з інших якусь із фраз: «У мене парна кількість знайомих в цій компанії» або «У мене непарна кількість знайомих в цій компанії». Чи може бути, що перша фраза була сказана 2025 разів?*Обгрунтуйте Вашу відповідь.*

Відповідь: Ні. Візьмемо ліцеїста, у якого парна кількість знайомих. Тоді він промовив фразу "У мене парна кількість знайомих в цій компанії"парну кількість разів (своїм знайомим, кількість яких є парним числом). Тепер розглянемо ліцеїста в якого непарна кількість знайомих. Тоді він промовив "У мене непарна кількість знайомих в цій компанії"непарну кількість разів, та оскільки він промовляв одну з фраз 49 разів (усім, крім себе), то фразу "У мене парна кількість знайомих в цій компанії"він мав промовити теж парну кількість разів. Отже, кожен промовляє фразу "У мене парна кількість знайомих в цій компанії"парну кількість разів, тож ця фраза не може бути сказана непарну (2025) кількість разів.

5.5 Квадрат 3×3 заповнений числами як це показане на рис. 2. Ярослав може пройти фішкою певним маршрутом так, що можна переходити з однієї клітинки на іншу, що має спільну сторону, та двічі бути на одній клітинці не можна. При цьому він виписує усі цифри з клітин на яких він послідовно побував зліва направо. Яке найбільше число при цьому може утворитися? *Обгрунтуйте Вашу відповідь.*

1	8	4
6	3	9
5	7	2

Рис. 3

Відповідь: 573618492. Зрозуміло, що число стане тим більше, чим більше в нього цифр. Тому бажано мати маршрут, що проходить через усі 9 цифр. Щоб такий маршрут був треба починати з 5 можливи полів - або кутових, або центрального. Це можна показати методом фарбування, ці поля будуть чорними, інші 4 поля - білі, фішка при ході змінює колір, тому, щоб обійти усі поля треба починати з чорної. Найбільше з чисел в цих 5 полів - це 5, далі просто треба рухатися в більшу цифру з можливих. Таким чином маємо таке число: 573618492.

6.1 Усі кульки Оксани сині, червоні, зелені або жовті. Третина куль сині, чверть куль червоні та 6 куль зелені. Яка найменша кількість жовтих куль може бути в Оксани? *Обгрунтуйте Вашу відповідь.*

Відповідь: 12. Нехай усього в Оксани було $12a$ куль. Тоді $4a$ куль – сині, $3a$ куль – червоні. Тому жовтих куль в Оксани $5a - 6$. Тоді найменше можливе значення буде при $a = 2$ і дорівнюватиме 4. Далі неважко порахувати, що синіх куль – 8, червоних та зелених – 6, жовтих куль – 4.

6.2 Знайдіть усі такі пари натуральних чисел, що їхній добуток на одиницю менший, аніж їхня подвійна сума. *Обгрунтуйте Вашу відповідь.*

Відповідь: $(3,5)$ та $(5,3)$. Позначимо за x та y шукані числа. Тоді за умовою $xy + 1 = 2(x + y)$. Нехай $x \geq y$ (зрозуміло, що якщо (x, y) є розв'язком, то (y, x) теж є розв'язком зі симетричності, тож будь-яка знайдена пара розв'язку (x, y) при $x \geq y$ дає розв'язок (y, x)). Нехай менше число $y \geq 5$. Тоді $xy + 1 \geq 5x + 1 = 3x + 2x + 1 \geq 3x + 2y + 1 > 2x + 2y$ (зрозуміло, що $3x > 2x$). Отже, рівність неможлива, і тому $y = 1$ або $y = 3$. При $y = 1$, отримуємо $x = 2x + 1$, тобто розв'язків у натуральних немає, а при $y = 3$ маємо пару розв'язків $(5, 3)$.

6.3 Ярослав розклав 3 однакових рівносторонніх сірих трикутники зі стороною 21 як це показано на рис. 4. При цьому зовнішні края цих трикутників утворили рівносторонній трикутник зі стороною 36. Чому дорівнює сторона білого рівностороннього трикутника, що утворився всередині?

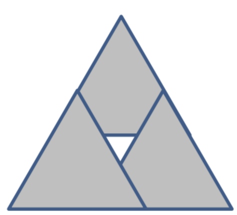

Рис. 4

Відповідь: Продовжимо сторони трикутників до перетинів зі сторонами великого трикутника (рис. 5). Тоді два сірих трикутника перетинаються так, що сумарно утворюють відрізок довжини 36 замість $21 + 21 = 42$, а тому їхня спільна частина має довжину 6. Таким чином всередині утворюються два трикутники зі стороною 6. Ці дві сторони та ще сторона невідомого трикутника дають сторону сірого трикутника, тобто 21. Таким чином сторона шуканого трикутника складає 9.

6.4 Для якого найменшого натурального n квадрат $n \times n$ можна розрізати на однакову кількість

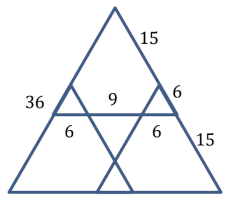

Рис. 5

фігурок L та U (рис. 6) *Обгрунтуйте Вашу відповідь.*


Рис. 6

Відповідь: 6. Припустимо, що ми використали по k фігурок кожного типу, тоді усього квадрат має складатися з 9k клітин, тобто $n \times n = 9k$, звідки n ділиться націло на 3. Для квадрату 3×3 заповнення неможливе, що легко перевірити шляхом перебору. Наступне найменше значення $n = 6$, для якого шукане розрізання існує. На рис. 7 показане як заповнити прямокутник 6×3, звідки зрозуміло як заповнити й квадрат 6×6.


Рис. 7

6.5 На нижній горизонталі шахівниці $n \times n$, $n \geq 3$ стоїть n білих пішаків, а на верхній – n чорних пішаків. Юра та Василь ходять по черзі, Юра грає білими пішаками та робить перший хід. За один хід кожний з гравців може просунути одного із своїх пішаків на будь-яку кількість клітин у своїй вертикалі на зустріч пішаку супротивника, але заборонено перескакувати через чужого пішака, не ходити зовсім або знімати свого пішака з шахівниці. Програє той, хто не може зробити черговий хід. У кого з гравців є стратегія, яка гарантує йому виграш? *Обгрунтуйте Вашу відповідь.*

Відповідь: При парному n перемагає Василь, при непарному - Юра. Кількість ходів скінченна, тому гра точно завершиться у певний момент. Нехай n - парне, тоді другий гравець притримується такої стратегії. Він розбиває вертикалі на пари, наприклад, $1 - 2$, $3 - 4$, ..., $(n-1) - n$. Після ходу Юри у вертикалі i Василь робить аналогічний хід у вертикалі, що вибрана в пару до i. Якщо Юра може зробити хід, то так само може зробити хід і Василь, а тому він і переможе. При непарному n Юра першим ходом фішку з останнього стовпчика підставляє прямо під пішака Василя і зводить задачу до парного випадку, але з першим ходом у Василя.

7.1 Числа a і b задовольняють рівність $\frac{2a}{a+b} + \frac{b}{a-b} = 2$. Знайдіть усі можливі значення виразу $\frac{3a-b}{a+5b}$. *Обгрунтуйте Вашу відповідь.*

Відповідь: 1 та 3. Домножимо обидві частини рівняння на $(a+b)(a-b)$, при розкриті дужок, отримуємо: $2a^2 - 2ab + ab + b^2 = 2a^2 - 2b^2$, а отже, $3b^2 = ab$. Отримуємо, що або $b = 0$, або $a = 3b$. У першому випадку значення шуканого виразу дорівнює $\frac{3a}{a} = 3$, а в другому $\frac{9b-b}{3b+5b} = 1$. Зауважимо, що всі випадки досягаються (тобто задовільняють область допустимих значень), наприклад, при $(1, 0)$ та $(3, 1)$.

7.2 Сторони трикутника a, b, c є натуральними числами, що задовольняють умови: $a + b = 9$, $a + c = 10$. Яке найменше та яке найбільше значення може мати периметр такого трикутника? *Обгрунтуйте Вашу відповідь.*

Відповідь: 13 та 17. Оскільки $P = a+b+c = (a+b)+(a+c)-a = 19-a$. Таким чином найбільше можливе значення периметру при найменшому можливому значенні a. При $a = 1$ маємо, що $b = 8$ та $c = 9$ і порушується нерівність трикутника, бо $a + b = c$. При $a = 2$ маємо, що $b = 7$ та $c = 8$ і шукане максимальне значення периметра – це 17. Найменше можливе значення периметру при найбільшому можливому значенні a. При $a = 8$ маємо, що $b = 1$ та $c = 2$ і порушується нерівність трикутника, бо $a > b+c$. При $a = 7$ маємо, що $b = 2$ та $c = 3$ і порушується нерівність трикутника, бо $a > b+c$. При $a = 6$ маємо, що $b = 3$ та $c = 4$ і шукане мінімальне значення периметра – це 13.

7.3 Чотирьом друзям Андрію, Богдану, Віці та Дарині роздали по 5 карт. Кожна карта має значення (1, 2, 3, 4 або 5) та колір (червоний, синій, жовтий та зелений). Кожна карта є унікальна (тобто не існує, наприклад, 2 зелені карти зі значенням 4). Після цього кожний з них сказав:

- Андрій: «В мене є 4 карти одного значення».
- Богдан: «В мене усі 5 карт сині».
- Віка: «Кожна з моїх 5 карт або синя або жовта».
- Дарина: «В мене 3 карти одного значення та ще 2 іншого, але також однакового».

Відомо, що рівно один з друзів збрехав. Хто саме? *Обгрунтуйте Вашу відповідь.*

Відповідь: Богдан. Збрехав або Андрій, або Богдан, оскільки їхні висловлювання суперечать одне одному. Якщо правду сказав Андрій, то треба перевірити чи могли інші (окрім Богдана) сказати правду. Так, наприклад, у Андрія 4 одинички та зелена двійка, у Віки по 2 двійки та трійки (сині і жовті) і жовта четвірка, у Дарини 3 четвірки (всі, крім жовтої) та 2 трійки (червона і зелена), решта карт у Богдана. Значить збрехав Богдан. Дійсно, якщо він сказав правду, то збрехав Андрій. Але тоді Віка мала сказати правду, тому в неї усі карти жовті. Таким чином у Дарини не може бути 3-х карт одного значення – суперечність.

7.4 В акваріумі плавають восьминоги, що мають по 8 щупалець, та семиноги, що мають по 7 щупалець. Володя порахував число N – загальну кількість щупалець в усіх тварин в акваріумі. При якому найменшому N не можна визначити точну кількість восьміногів та кількість семиногів, якщо відомо, що там є принаймні 1 восьминіг та 1 семиніг? *Обгрунтуйте Вашу відповідь.* *Обгрунтуйте Вашу відповідь.*

Відповідь: 71. Для такого N, що не можна визначити однозначно кількість восьминогів та семиногів має справджуватися рівність: $N = 7a + 8b = 7x + 8y$, де пара чисел (a, b) відмінна від пари чисел (x, y). Без обмеження загальності розгляду вважаємо, що $a > x$. Далі маємо, що $7(a-x) = 8(y-b)$. Звідси $a-x = 8k$ та $y-b = 7k$ для деякого натурального k. Таким чином $a \geq 9$, бо при $a = 8$ було б $x = 0$, що порушує умову задачі. Число $N = 7a+8b \geq 7\cdot 9+8\cdot 1 = 63+8 = 71$. Покажемо, що число 71 умову задовольняє. Дійсно, в акваріумі можуть бути 9 семиногів та 1 восьминіг, разом $9\cdot 7+1\cdot 8 = 63+8 = 71$. З іншого боку там може бути 1 семиніг та 8 восьминогів, разом $1 \cdot 7 + 8 \cdot 8 = 7 + 64 = 71$.

7.5 Задача 6.5.