Задачі на побудову

Розв'язати задачу на побудову геометричної фігури – це значить указати послідовність елементарних побудов, після виконання яких отримаємо певну фігуру, і *довести,* що саме ця фігура має властивості, передбачені умовою, тобто *що саме ця фігура є шуканою.*

Елементарні побудови виконуються за допомогою лінійки (без метричних поділок) і циркуля.

При цьому варто пам'ятати таке.

За допомогою лінійки можна провести:

– довільну пряму;
– довільну пряму, що проходить через задану точку;
– пряму, що проходить через дві задані точки.

Зауважмо, що ніяких інших операцій виконувати лінійкою не можна, зокрема, не можна відкладати відрізки заданої довжини або використовувати косинець для побудови прямого кута.

За допомогою циркуля можна:

– провести коло або його частину (дугу) з заданого центра заданим радіусом;
– відкласти на заданій прямій відрізок заданої довжини.

Етапи розв'язування та елементи розв'язання задач на побудову

Для розв'язування задач на побудову можна виділити такі етапи.

1. Аналіз – міркування в процесі пошуку способів розв'язання. (Коли припускається, що шукану побудову виконано.) Запис цього етапу розв'язування *не є обов'язковим* і його можна наводити в довільній формі або не наводити зовсім (не записувати).
2. План побудови – *обов'язковий* елемент запису розв'язання. Наводиться послідовний *план* (алгоритм) побудови, у якому використовуються задані в умові елементи та опорні задачі на побудову.
3. Доведення – *обов'язковий* елемент запису розв'язання. Потрібно довести, що побудована фігура є тією, яку вимагалося побудувати, тобто *шуканою.* (Доведення починаємо з переліку того, що маємо за побудовою.)
4. Дослідження – з'ясування умов, коли за заданими елементами відповідна побудова можлива, а коли ні; з'ясування кількості розв'язків залежно від конфігурації заданих елементів. (Цей етап не є обов'язковим елементом розв'язання.)

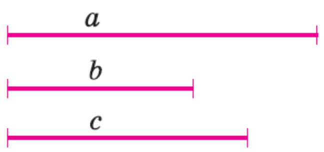
Зауваження. У записі плану побудови не потрібно описувати, як саме здійснюються *опорні побудови,* використані в розв'язанні задачі. Перелік відповідних опорних задач буде подано нижче.

Основні побудови, які використовуються у задачах

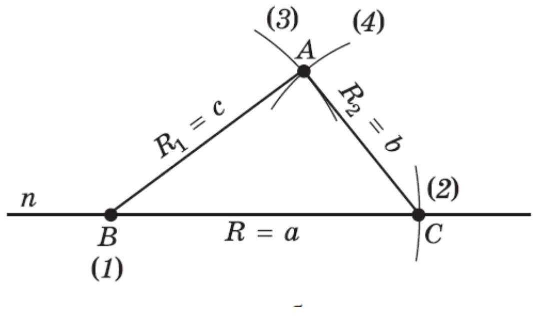
1. **<u>Побудова трикутника за трьома сторонами</u>**

Задано три відрізки, потрібно побудувати трикутник, сторони якого дорівнюють заданим відрізкам.

Нехай маємо три відрізки *a, b* і *c*:



Побудуймо трикутник, сторонами якого будуть саме відрізки такої довжини.



План побудови

- За допомогою лінійки проведімо довільну пряму *n* і позначмо на ній довільну точку *B* (1).
- На прямій *n* за допомогою циркуля відкладімо відрізок *BC* = *a* (дуга (2)).

- За допомогою циркуля опишімо дугу (3) кола радіуса *c* із центром у точці *B*.
- У тій самій півплощині відносно прямої *n*, де проведена дуга (3), опишімо дугу (4) кола радіуса *b* із центром у точці *C*.
- Точку перетину дуг (3) і (4) позначмо через *A і* з'єднаймо її відрізками з точками *C* і *B*.

Трикутник *ABC* – шуканий.

Д о в е д е н н я

За побудовою маємо: BC = a, CA = b і AB = c.

Д о с л і д ж е н н я

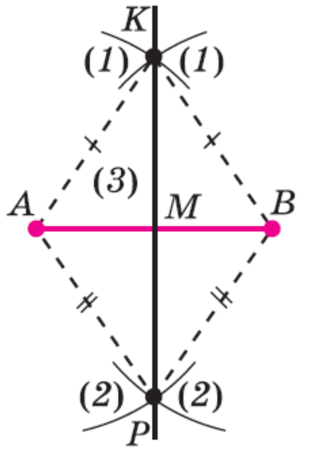
Чи завжди можлива вказана побудова?

Побудову можна виконати тоді, коли будь-який із заданих відрізків менший за суму двох інших (за нерівністю для сторін трикутника).

2. Поділ відрізка навпіл

Задано відрізок, потрібно знайти його середину, тобто точку, що ділить його навпіл.

Нехай маємо відрізок *AB*. Знайдімо його середину.



А н а л і з

Середина відрізка лежить на серединному перпендикулярі, проведеному до цього відрізка (за властивістю серединного перпендикуляра).

П л а н   п о б у д о в и

- Із центрами в точках *A* і *B* опишімо дуги радіуса, більшого за половину відрізка *AB*, до їх перетину в точці *K* (в одній півплощині відносно прямої *AB*) і в точці *P* (в другій півплощині відносно прямої *AB*).
- Через точки *K* і *P* проведімо пряму, яка перетне заданий відрізок у точці *M*.

Точка *M* – шукана.

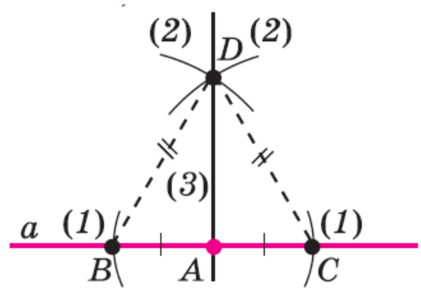
Д о в е д е н н я

За побудовою маємо: AK = BK, PA = PB. Тоді *KP* – серединний перпендикуляр до відрізка *AB*, тобто *KP* проходить через його середину – точку *M*.

3. Побудова прямої, перпендикулярної до заданої, яка проходить через задану її точку

Через точку на заданій прямій потрібно побудувати перпендикулярну до неї пряму.

Нехай маємо пряму *a* і точку *A* на цій прямій. Проведімо через точку *A* пряму *b* таку, що $b \perp a$.



А н а л і з

Точка *A* є однією з точок шуканої прямої. Щоб провести певну пряму, треба мати дві її точки. Очевидно, що друга точка не належить прямій *a*. Якби шукана пряма була серединним перпендикуляром до якогось відрізка, то така друга точка була б визначена як рівновіддалена від кінців цього відрізка.

П л а н   п о б у д о в и

- На даній прямій *a* за допомогою циркуля від точки *A* відкладімо два рівних відрізки: *AB = AC*.
- Із центрами в точках *B* і *C* опишімо дуги (2) радіусом, більшим від попередніх відкладених відрізків в одній півплощині відносно *a*.
- Точку перетину цих дуг позначмо через *D*. Через точки *A* і *D* проведімо пряму.

Пряма *AD* і є шуканою.

Д о в е д е н н я

За побудовою маємо: точка *A* – середина відрізка *BC, BD = DC* (за побудовою). Тоді точки *A* і *D* лежать на серединному перпендикулярі до відрізка *BC*, тобто $AD \perp a$.

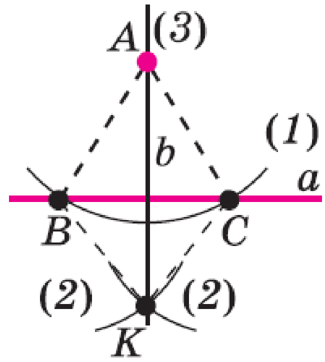
4. Побудова прямої, перпендикулярної до даної, яка проходить через точку, що лежить поза даною прямою

Через точку, що лежить поза даною прямою, потрібно побудувати пряму, перпендикулярну до заданої прямої.

Нехай дано пряму *a* і точку *A* поза цією прямою. Проведімо через точку *A* пряму *b* таку, що $b \perp a$.

А н а л і з

Аналогічно до попередньої побудови доцільно скористатися властивістю серединного перпендикуляра до відрізка.



П л а н п о б у д о в и

- З точки *A* проведімо дугу довільного радіуса (більшого за відстань до прямої), яка перетне пряму *a* в точках *B* і *C*.
- Із центрами в цих точках опишімо дуги радіусом, більшим за половину відрізка *BC*, в одній півплощині відносно прямої *a* так, щоб вони перетнулися. Точку їх перетину позначмо через *K*.
- Через точки *A* і *K* проведімо пряму.

Пряма *AK* і є шуканою.

Д о в е д е н н я

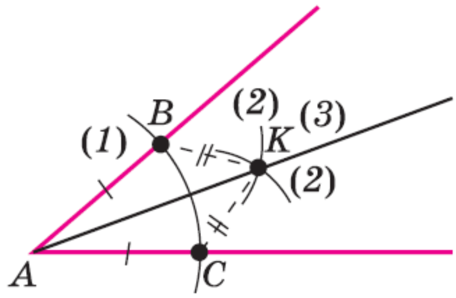
За побудовою маємо: *AB* = *AC*, *KB* = *KC*. Тоді точки *A* і *K* належать серединному перпендикуляру до відрізка *BC*, тобто $AK \perp a$.

5. Побудова бісектриси кута

Нехай дано кут *A*. Треба побудувати його бісектрису.

П л а н п о б у д о в и

- Із центром у точці кута *A* проведімо дугу довільного радіуса (1), яка перетне сторони кута в точках *B* і *C*.
- Із центрами в точках *B* і *C* радіусом, більшим за половину відрізка *BC*, опишімо дуги (2) всередині кута до їх перетину. Отримаємо точку *K*.
- З точки *A* через точку *K* проведімо промінь *AK* (3).



Промінь *AK* – шукана бісектриса кута *A*.

Д о в е д е н н я

За побудовою маємо: *AB* = *AC*, *BK* = *CK*, *AK* – спільна сторона трикутників *ABK* і *ACK*. Тоді Δ*ABK* = Δ*ACK* (за третьою ознакою). Тоді ∠*BAK* = ∠*CAK* (як відповідні кути рівних трикутників), тому *AK* бісектриса кута *BAC*.

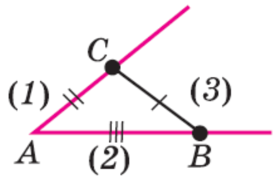
6. Побудова кута, рівного заданому

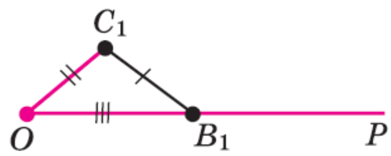
Потрібно побудувати кут, що буде рівним заданому куту.

Нехай задано кут *A* і промінь *OP*. Від променя *OP* з вершиною в точці *O* відкладімо кут, рівний куту *A*.

А н а л і з

У рівних між собою трикутниках відповідні кути рівні. Отже, треба побудувати трикутник з кутом *A*, а потім побудувати рівний йому трикутник.





П л а н п о б у д о в и

- Позначмо на сторонах заданого кута дві довільні точки *B* і *C* та сполучімо їх відрізком. Отримали Δ*ABC*.
- Побудуймо за трьома сторонами трикутник OB_1C_1 , рівний трикутнику *ABC*: $OB_1 = AB$ і належить променю *OP*, $OC_1 = AC$, $C_1B_1 = CB$.

$\angle C_1OB_1$ – шуканий.

Доведення

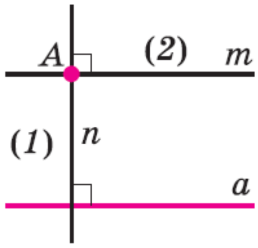
За побудовою $\Delta OB_1C_1 = \Delta ABC$. Тоді $\angle O = \angle A$ (як відповідні кути рівних трикутників).

7. Побудуйте пряму, що проходить через задану точку, паралельно заданій прямій.

Нехай задано пряму a і точку A поза нею. Проведімо через точку A пряму m таку, що $m \parallel a$.

Аналіз

Якщо б ми мали такі паралельні прямі, то пряма, проведена перпендикулярно до однієї з них, була б перпендикулярною і до другої.



План побудови

- Через точку A проведімо пряму n, $n \perp a$.
- Через точку A проведемо пряму m, $m \perp n$. Пряма m – шукана.

Доведення

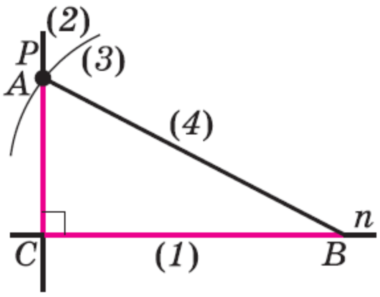
За побудовою маємо: $m \perp n$ і $a \perp n$. Тоді $m \parallel a$.

Задача №1

Побудуйте прямокутний трикутник за катетом і гіпотенузою.

Дано: m, k.

Побудувати ΔABC: (1) $a = m$; (2) $c = k$; (3) $\angle C = 90°$.



План побудови

- На довільній прямій n відкладімо відрізок $CB = m$.
- Побудуймо $CP \perp n$ (така побудова вище розглянута).
- Із центром у точці B радіусом $R = k$ опишімо дугу до перетину з CP, отримаємо точку A.
- З'єднаймо відрізком точки A і B.

ΔABC – шуканий.

Доведення

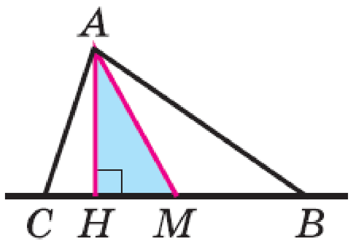
За побудовою маємо: $a = m$; $c = k$; $\angle C = 90°$, тоді вимоги (1) - (3) виконуються.

Задача №2

Побудуйте трикутник за його стороною і висотою та медіаною, проведеними до цієї сторони.

Дано: t; n; k.

Побудувати ΔABC: (1) $a = t$; (2) $h_a = n$; (3) $m_a = k$.



План побудови

- Побудуймо прямокутний трикутник AHM ($\angle AHM = 90°$, $AH = n$, $AM = k$).
- Поділімо відрізок t навпіл.
- На прямій HM по різні сторони відносно точки M відкладімо відрізки MB та CM, які рівні половині відрізка t.

ΔABC – шуканий.

Доведення

Маємо за побудовою: $\angle AHM = 90°$, $AH = n$, $AM = k$, $MB = CM = \frac{t}{2}$.

Виконується за побудовою: $AH = h_a$, $AM = m_a$, $AH = n$, $AM = k$, $CB = CM + MB = \frac{t}{2} + \frac{t}{2} = t$, тому пункти (1)-(3) виконуються.

Задачі на самостійне опрацювання:

1. На прямій AB знайдіть точку, сума відстаней якої від двох заданих точок M і N була б найменшою.

2. Задано пряму AB і точки M і N. Знайти на прямій AB таку точку X, щоб різниця відстаней від точки X до точок M і N була найбільшою.

3. Накресліть різносторонній трикутник MNP. Знайдіть за допомогою циркуля та лінійки на стороні MN точку, рівновіддалену від прямих NP і MP.

4. У трикутнику знайти точку, рівновіддалену від всіх його сторін. На площині знайдіть точки, рівновіддалені від прямих, яким належать сторони заданого трикутника.

5. Заано кут A і точки B та C, розміщені на одній стороні кута. Знайдіть (побудовою) таку точку M, рівновіддалену від сторін кута, що $MB = MC$.

6. Задано кут A і точки B і C, розташовані на різних сторонах кута. Знайдіть (побудовою) таку точку X, рівновіддалену від сторін кута, що $BX = XC$.

7. Всередині заданого кута знайдіть точку, рівновіддалену від сторін кута на задану відстань a.

8. Через точки A і B проведіть дві прямі так, щоб задана пряма MN ділила навпіл кут між ними.

9. Задано кут ABC і точку M всередині нього. Знайдіть на сторонах цього кута такі точки D і E, щоб трикутник MDE мав найменший периметр.

10. Побудуйте рівнобедрений трикутник за висотою, проведеною до бічної сторони, і відрізком бічної сторони, розташованим між основою висоти і вершиною кута при основі.

11. Побудуйте рівнобедрений трикутник за основою і висотою до бічної сторони.

12. Побудуйте прямокутний трикутник за висотою, опущеною на гіпотенузу, і бісектрисою прямого кута.

13. Побудуйте рівнобедрений трикутник за заданим периметром та висотою до основи.

14. Побудуйте трикутник за кутом A, стороною c та сумою сторін a і b.

15. Побудуйте прямокутний трикутник за катетом і різницею гіпотенузи та другого катета.

16. Побудуйте трикутник за стороною, прилеглим до неї кутом і різницею другої та третьої сторін.

17. Побудуйте трикутник за b, β і $a + c$.

18. Побудуйте трикутник за двома сторонами і висотою до однієї з цих сторін.

19. Побудуйте трикутник за двома сторонами і медіаною, проведеною до однієї з цих сторін.

20. Побудуйте рівнобедрений трикутник зо його бічною стороною a і висотою, яка проведена до неї.