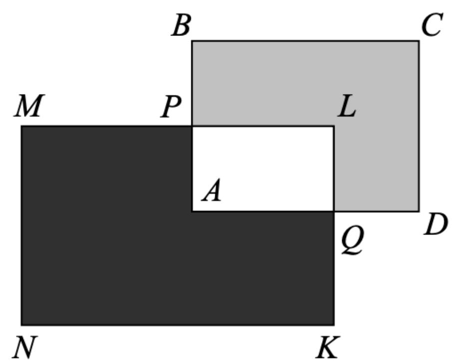
Відкрита олімпіада з математики. Розв'язки

1 5 клас.

5.1 Олексій задумав число. Додав до нього число, що більше за загадане на два, а потім відняв від цієї суми число, що менше за загадане число на 1. В Олексія вийшло 2027. Яке число загадав Олексій? *Обгрунтуйте Вашу відповідь.*

Відповідь: 2024. Нехай Олексій задумав число x. Тоді після першої операції він отримає число $x + (x + 2)$, а після другої - $x + (x + 2) - (x - 1) = x + 3$. Отже, $x + 3 = 2027$, а тому $x = 2024$.

5.2 Прямокутники $ABCD$ та $KLMN$ зі сторонами $AB = 3$, $BC = 5$, $MN = 4$ та $ML = 6$ розташовані, як це показано на малюнку. Відомо, що площа сірої частини прямокутника $ABCD$ дорівнює 10. Визначте, чому дорівнює площа чорної частини прямокутника $KLMN$. *Обгрунтуйте Вашу відповідь.*



Відповідь: 19. Площа чотирикутника $ABCD$ дорівнює $AB * BC = 15$. Площа білого прямокутника ($PALQ$) є різницею площ $ABCD$ та сірої частини $ABCD$, а тому дорівнює $15 - 10 = 5$. Чорна частина прямокутника є різницею площ чотирикутника $MNLK$ (чия площа $MN * ML = 4 * 6 = 24$) та $PALQ$ (з попередніх міркувань - 5), отже площа зафарбваної чорної частинки дорівнює $24 - 5 = 19$.

5.3 Степан виписав 50 послідовних натуральних чисел. Він помітив, що було виписано 136 цифр. Які числа міг виписати Степан? *Знайдіть всі варіанти і поясніть, чому інших не існує.*

Відповідь: один варіант - від 86 до 135. Зауважимо, що якби Степан виписав тільки трьохцифрові або більші числа, то кількість цифр була би мінімум $50 * 3 = 150$, що вже більше за кількість виписаних цифр. Водночас якби Степан виписав тільки двоцифрові, то кількість цифр була би недостатньою - $50 * 2 = 100$. Отже, Степан виписав і двоцифрові, і трьохцифрові числа. Нехай було x двоцифрових та відповідно $50 - x$ трьохцифрових. Тоді $2x + 3 * (50 - x) = 136$, а тому $x = 150 - 136 = 14$. Отже, було виписано рівно 14 двоцифрових чисел, звідси послідовність має починатись з 86.

5.4 Ярослав та Мирося грають в гру на шаховому полі 8x8. В лівому нижньому кутку стоїть тура. За один хід дозволяється порухати туру на довільку кількість клітинок або вправо, або вверх. Двоє ходять по черзі (Ярослав перший). Виграє той, хто поставить клітинку в верхній правий куток. У кого є стратегія гри, що не порушує правил, та яка гарантує перемогу незалежно від ходів іншого гравця? *Обгрунтуйте Вашу відповідь.*

Відповідь: виграшна стратегія є в Миросі. Запропонуємо наступну стратегію для Миросі: коли Ярослав ходить на x клітинок вгору (праворуч), то Мирося ходить на таку ж кількість x клітинок праворуч (вгору) (зауважте, заміну напрямку). Таким чином після ходу Миросі тура завжди опинятиметься на головній діагоналі (де і розтошанова права верхня клітинка). Мирося завжди зможе зробити такий хід, бо Ярослав розпочинає з клітинки, що розташована на головній діагоналі, і якщо він зможе походити на x клітинок вгору (вправо), то для Миросі буде місце для того, щоб зробити таких же симетричний хід вправо (вгору).

5.5 Данило та Женя мають два однакових набори по 36 кубиків. Данило розклав свої кубики на 7 купок і стверджує, що в кожній купці всі кубики однакові. Женя розклала свої кубики на 5 купок і вона стверджує, що в кожній купці всі кубики різні. Доведіть, що хтось з них помиляється.

Доведення: Припустимо, що Данило та Женя праві у своїх твердженнях. Тоді, справедливим є наступне твердження - знайдуться 6 кубиків, що є однаковими між собою. Припустимо, що це не так і максимум 5 кубиків є одночасно однаковими між собою, тоді у кожній купці Данила максимум 5 кубиків, що суперечить умові, бо в нього вийшло 7 купок, а отже максимум $5*7 = 35$ кубиків, що є менше за 36. Отже, такі 6 кубиків знайдуться. Однак, це суперечить тому, що стверджує Женя - якщо існує 6 кубиків, що є однакові між собою і є 5 купок, у якусь з купок, за приницпом Діріхле, потрапить 2 кубики з цієї групки однакових кубиків, отже її твердження неістинне. Ця суперечність завершує доведення.

6.1 У компанії з трьох осіб один - лицар, тобто завжди говорить правду; один - брехун, тобто завжди бреше; і один - дипломат, тобто говорить правду або бреше на свій розсуд. Щоб дізнатись, хто з них є ким, кожного запитали, ким він є. Перший відповів, що він лицар; другий - що він брехун; а третій - що він або лицар або брехун. Хто з них є ким? *Обгрунтуйте Вашу відповідь.*

Відповідь: Перший - брехун, другий - дипломат, третій - лицар. Зауважимо, що брехун не може бути другим (інакше твердження "я брехун" було би істинним) та не може бути третім (інакше твердження "я брехун або я лицар" було би істинним), отже перший - брехун. Тоді, другий не може бути лицарим (інакше твердження "я брехун" було би неістинним), отже третій - лицар. У такому разі, другий - дипломат і він збрехав.

6.2 Задача 5.2.

Відповідь: 127.

6.3 Знайдіть найбільше натуральне число, що при діленні з остачею на 2024 має неповну частку, яка менша за остачу. *Обгрунтуйте Вашу відповідь.*

Відповідь: 2024*2022 + 2023 = 4094551. Зауважимо, що чим більше значення неповної частки, тим більше саме число, тож наша ціль максимізувати неповну частку. Нехай вона дорівнює x, а остача y. Тоді, за умовою $y > x$ (неповна частка менша за остачу) або ж $y \geq x + 1$. У свою чергу максимальне значення остачі при діленні на 2024 - 2023, тож $y \leq 2023$, а тому $x \leq 2022$. Наше число - $2024 * x + y \leq 2024 * 2022 + 2023 = 4094551$.

6.4 Задача 5.4.

6.5 Василь задумав число, в записі якого немає нулів. Потім він якимось чином переставив цифри в записі числа та додав його до початкового. В результаті вийшло число, що складається лише з одиниць. Чи не помилився Василь? *Обгрунтуйте Вашу відповідь.*

Відповідь: Василь помилився. Припустимо, що Василь не помилився. Нехай $a_1a_2\ldots a_n$ - задумане число, а $b_1b_2\ldots b_n$ те число, що вийшло в результаті перестановки. Тоді отримане число $11\ldots1 = a_1a_2\ldots a_n + b_1b_2\ldots b_n$. Розглянемо останню одиничку - вона утворилась з додавання a_n та b_n. Оскільки за умовою жодна з цифр не є нулем, це можливо тільки тоді, коли $a_n + b_n = 11$

(не може бути 1, бо тоді одна з цифр повинна бути 0; не може бути 21, бо максимум це $9+9=18$). У такому разі, вони додали одиничку до наступної суми - $a_{n-1}+b_{n-1}$, а тому вона дорівнює 10 (20 неможливо досягнути). Ця сума, у свою чергу, додала одиничку до наступної, а тому вона теж 10 ($a_{n-2}+b_{n-2}=10$) і так для всіх наступних сум включно до $a_1+b_1=10$. Отже, ми маємо рівності, що $a_i+b_i=10$ для всіх i окрім n та $a_n+b_n=11$. Зауважимо, що з $a_i+b_i=10$ виходить, що a_i та b_i однакової парності для кожного i, а от з $a_n+b_n=11$ виходить, що a_n та b_n різної парності. Отже, кількість парних та непарних цифр у $a_1a_2\ldots a_n$ та $b_1b_2\ldots b_n$ відрізняється, що неможливо, бо $b_1b_2\ldots b_n$ утворене переставлянням цифр $a_1a_2\ldots a_n$.

7.1 На дошці записано два дроби. Коли чисельник першого дробу помножили на 7, а знаменник другого - на 3, сума цих дробів не змінилась. Чому дорівнює відношення другого дробу до першого? *Обгрунтуйте Вашу відповідь.*

Відповідь: 9. Нехай два задані дроби - $\frac{a}{b}$ та $\frac{c}{d}$. За умовою $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{7a}{b}+\frac{c}{3d}$. Отже, $\frac{6a}{b}=\frac{c}{d}-\frac{c}{3d}=\frac{2c}{3d}$. Тому, $\frac{6*3}{2}\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$. Відповідно $\frac{c}{d}$ до $\frac{a}{b}$ дорівнює 9.

7.2 Задача 6.3.

7.3 В 11-А класі 20 учнів. На уроці математики, коли Оксана Богданівна відвернулась до дошки, кожен дав потиличника не менше, ніж 10 іншим учням. Доведіть, що є двоє учнів, які дали потиличника один одному.

Доведення: Припустимо, що це не так. Тоді у кожній парі учнів було завдано не більше одного потиличника. Оскільки, у класі 20 учнів, то усього пар учнів - $\frac{20*19}{2}=190$, отже максимум було завдано 190 потиличників. З іншого боку, за умовою задачі, кожен з учнів завдав щонайменше 10 потиличників, а отже їхня мінімальна кількість - $10*20=200$. Ця суперечність завершує доведення.

7.4 Сторони чотирикутника $ABCD$ мають такі довжини: $AB=9$, $BC=2$, $CD=14$, $DA=5$. Знайдіть довжину діагоналі AC, якщо відомо, що вона є цілим числом. *Обгрунтуйте Вашу відповідь.*

Відповідь: 10. Запишемо для трикутника ABC нерівність трикутника: $AB+BC>AC$, отже $AC<11$. Запишемо нерівність трикутника і для трикутника CDA: $CA+AD>CD$, отже $AC+5>14$, тому $AC>9$. Виходить, що єдине ціле значення для AC, яке воно може досягати - 10.

7.5 На дошці записані 2024 числа $x_1, x_2, ..., x_{2024}$. Ярослав та Мирося грають в гру, що складається з рівно 2024 кроків. На кожному кроці, Ярослав обирає довільне число (необов'язково ціле), та віднімає це число від записаних чисел на дошці. Після цього Мирося замість кожного числа на дошці записує його модуль. По завершенню гри (після 2024 кроків) Ярослав сплачує Миросі суму всіх записаних чисел в гривнях. Для заданого набору чисел, яку найменшу суму може сплатити Ярослав? *Обгрунтуйте Вашу відповідь.*

Відповідь: 0. Зауважимо, що якщо на певному ході на дошці записано два числа x_i та x_j, Ярослав може зробити їх протилежними за значеннями, якщо відніме від них їхнє середнє арифметичне $\frac{x_i+x_j}{2}$, після чого Мирося зробить їх однаковими за значенням (оскільки візьме модуль). Отже, кожного ходу Ярославові вдасться зробити однакові числа. При цьому зауважимо, що якщо числа вже однакові, то вони такими залишатимуться до кінця гри (бо весь час будуть відніматись однакові числа). Кожного кроку Ярослав додаватиме до купки однакових чисел ще одне (навіть якщо середнє арифметичне не є цілим числом) і зрештою після 2023 ходів усі числа будуть однакові, а тому, 2024-им ходом Ярослав відніме це число і на дошці будуть записані тільки нулі.