7 клас

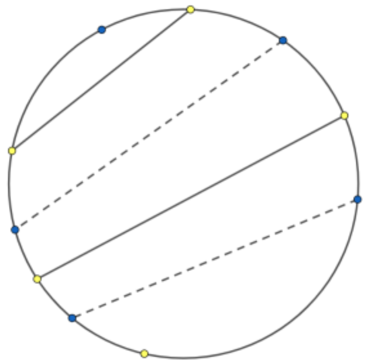
"Все що я знаю – що я нічого не знаю"
Філософ Сократ

1. Малюк та Карлсон грають в таку гру. На початку гри в них є купа, що складається із 100 цукерок. Малюк за один свій хід може або поділити існуючу купу цукерок на дві купки, кожна з яких має містити принаймні одну цукерку, або з'їсти 1 цукерку з будь-якої купки. Карлсон за свій хід може з'їсти повністю усі цукерки з однієї купки. Перемагає в цій грі той, хто з'їсть останню цукерку. Чи зможе Малюк перемогти в цій грі, якщо перемогти хоче кожний?

Відповідь: так.
Розв'язанн: Якщо Малюк має одну купку з однієї останньої цукерки, то він перемагає, якщо з'їсть її. Інакше, він купку, що отримає, ділить на 2, в одній – 1 цукерка, а в іншій усі інші. Якщо Карлсон з'їсть велику купку, то Малюк наступним ходом перемагає. Інакше, Карлсон з'їдає купку з 1цукерки і передає хід Малюку. Оскільки кожним ходом кількість цукерок зменшується на одну, настане момент, коли перед Карлсоном буде 2 купки, у кожній з яких по 1-й цукерці. Він з'їдає передостанню, а Малюк останню і перемагає.

2. Олексій відмітив на колі20 жовтих та 20 синіх точок. Після цього Василь з'єднує відрізками точки одного кольору так, щоб ці відрізки не мали спільних точок. Яку найбільшу кількість відрізків зможе гарантовано провести Василь, як би ці точки не розставив по колу Олексій?

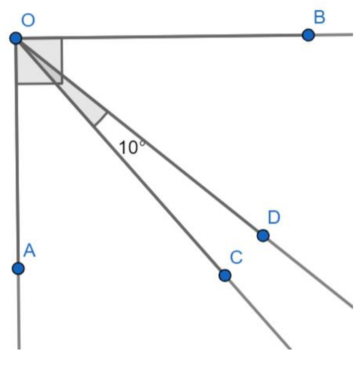
Відповідь: 19
Розв'язання: Покажемо, що Василь завжди може провести не менше 19 відрізків. Якщо якісь дві точки одного кольору сусідні, то Василь з'єднує їх. Після цього ці точки та відрізок можна не розглядати, бо вони не впливають на інші відрізки. Якщо усі точки прибрані, то проведено 20 відрізків. Якщо точки лишилися, то їхні кольори чергуються. Після цього Василь обирає деяку точку, наприклад, A, і починає з'єднувати по черзі сусідні з A точки (рис. 1). Таким чином будуть проведені разом 19 відрізків.


(рис. 1)

Покажемо, що більшої кількості досягнути не вдасться. Олексій розставляє точки по черзі – жовта, синя, жовта, синя…, тоді будь-який відрізок, проведений Василем поділяє усі точки так, що по різні боки від неї – непарна кількість точок. А тому принаймні одна з точок не може бути з'єднана відрізком за правилами.

3. Промені OA та OB утворюють прямий кут. Мирося провела всередині цього кута промені OC та OD, кут між якими дорівнює 10°. Виявилось, що сума найбільшого та найменшого з п'яти кутів AOC, AOD, BOC, BOD, COD складає 85°. Знайдіть величини трьох кутів, на який розбивають прямий кут AOB промені OC та OD.

Відповідь: 65°,10°,15°.
Розв'язання: Без обмеження загальності, будемо вважати, що ∠AOC ≥ ∠BOD. ∠AOD = 10° + ∠AOC, тому ∠AOD > ∠AOC та ∠AOD > COD; ∠BOC = 10° + ∠BOD, тому ∠BOC > ∠BOD та ∠BOC > COD; крім того, ∠BOC = 10° + ∠BOD ≤ 10° + ∠AOC = ∠AOD. Таким чином, ∠AOD - найбільший.



∠AOC + ∠BOD = 90° - 10° = 80° => ∠AOC ≥ 40°. Тому ∠COD = 10° є меншим за ∠AOC, ∠AOD, ∠COB (10° + ∠DOB). Тому найменшим кутом може бути ∠COD та ∠BOD. Розглянемо ці два варіанти:

1) Це $\angle COD=10°$. Тоді $10°+\angle AOD=85°$ => $\angle AOD=75°$ => $\angle AOC=65°$. Для перевірки обрахуємо $\angle DOB = 90° – \angle AOD = 15°$. Маємо першу відповідь: 65°, 10°, 15°
2) Це $\angle DOB$. Тоді виходить, що $\angle AOD+\angle BOD= 85°$. Але насправді $\angle AOD+\angle BOD= 90°$. Отримали суперечність.

4. 9 дітей збирали горіхи у саду. Всі вони зібрали однакову кількість горіхів. Після цього вони склали ці горіхи у 3 кошики. В першому кошику на 6 кг горіхів менше, ніж у двох інших разом. А в другому — на 10 кг менше, ніж у двох інших разом. Яку найменшу кількість горіхів могли зібрати діти, і скільки кілограмів горіхів тоді було у кожному кошику?

Відповідь: 18 кг; 6 кг в першому, 4 кг в другому, 8 кг в третьому
Розв'язок: Позначимо за x масу горіхів в першому кошику, y - в другому і z - третьому. Запишемо умову використовуючи нові позначення:
$x+6=y+z$
$y+10=x+z$
$9 \mid (x+y+z)$
Виразимо z через x та y з перших двох рівнянь:
$z=x-y+6$
$z=y-x+10$
Прирівняємо дві рівності:
$x-y+6=y-x+10$
$2x-2y=4$
$x-y=2$ (1) => $z=8$
Просумуємо всі змінні:
$x+y+z=x+y+8=2y+10$
$9 \mid (2y+10)$
Ми повинні отримати найменшу суму, а значить $2y+10$ повинне бути найменшим числом, яке ділиться на 9, тому $2y+10=18 \Leftrightarrow y=4$. Підставивши в умову (1) отримаємо те, що $x=6$.

5. Будемо називати натуральне число подільним, якщо воно ділиться на кожну свою ненульову цифру. Наприклад, числа 10 та 122 - подільні. Яка найбільша кількість натуральних чисел, що йдуть поспіль, може бути подільними?

Відповідь: 13.
Розв'язання:
Лема: Якщо серед цих послідовних чисел є x і x+10, то остання цифра цих чисел це 0, 1, 2 або 5.

Доведення: Нехай b - це остання цифра числа x, тоді x і x+10 закінчуються на ту саму цифру, тому діляться на b (якщо b не нуль). Тому і їхня різниця: x+10 - x = 10 ділиться на b. Таким чином, b це 0 (на нього ми не перевіряємо подільність), 1, 2 або 5.

Нехай кількість послідовних чисел, які є подільними, є ≥ 14. Тоді 1-е і 11-те; 2-е і 12-те; 3-є і 13-те; 4-те і 14-те числа мають однакову останню цифру. За Лемою, ця остання цифра має бути з набору {0, 1, 2, 5}, та це не є можливим для 4-ьох послідовних чисел (якими є перші 4 числа з нашого набору подільних чисел).

Тепер, наведемо приклад для 13 послідовних подільних чисел:

Нам хотілось би взяти за основу число (яке буде першим в нашій послідовності), яке не буде покладати нових умов на властивість подільності - тобто, яке б складалось тільки з нулів та одиничок, та ділилось би на всі цифри від 1 до 9. Легко перевірити, що число 111111 ділиться на 7. Для того, щоб задовольнити подільність на 9, нам потрібно, щоб сума цифр числа ділилась на 9 - для цього розглянемо число з 18 одиничок: сума цифр в ньому 18 (ділиться на 9) та ми можемо його розкласти на 3 блоки по 6 одиничок, кожен з яких буде ділитись на 7. Для того, щоб задовольнити подільність на 8 та 5, давайте домножимо дане число з 18 одиничок на 1000. Таким чином, наше число а має наступний вигляд: $a = 111111111111111111000$ та ділиться на 9, 8, 7, 5. Легко показати, що воно ділиться і на 6, 4, 3, 2, 1.

Тепер давайте покажемо, що й наступні 12 чисел теж будуть подільними. Числа виду $a+1$, $a+2$, .., $a+9$ будуть подільними, бо в них зміниться лише остання цифра та наше число а ділиться на неї. При переході через десяток (тобто числа $a+10$, $a+11$, $a+12$) властивість подільності теж залишиться, бо цифра десятків стане 1, а остання цифра буде 0, 1 та 2 для цих чисел відповідно, і наше число буде ділитись на неї.