

1. Данило виписав на дошці п'ять попарно різних чисел від 1 до 9 таким чином, що сума будь-яких двох з них не дорівнює 10. Яке число мав Данило виписати обов'язково?

Відповідь: 5

Розв'язання: Числа 6,7,8,9 можуть бути не написаними, для чого достатньо виписати числа 1,2,3,4,5, які очевидно умову задовольняють. Так само, якщо виписати числа 5,6,7,8,9, які також умову задовольняють, то не обов'язково мають бути виписані числа 1,2,3,4. Таким чином єдине число, що може задовольняти умову – це 5. Покажемо, що якщо це число не виписати, то умову виконати неможливо.

Дійсно, тоді з таких чотирьох пар чисел, що в сумі дають 10, а саме: $1+9, 2+8, 3+7, 4+6$ при виборі п'яти чисел, принаймні з однієї пари будуть вибрані обидва. А тому буде пара чисел із сумою 10, що й завершує доведення.

2. По колу лежать 10 монет. Частина гербом догори, інші гербом донизу. За один хід можна або перегорнути 4 сусідні монети, або перегорнути по 2 монети праворуч та ліворуч від деякої монети. Чи можна такими ходами при будь-якому початковому розташуванні монет досягти того, щоб усі монети стали гербом доверху?

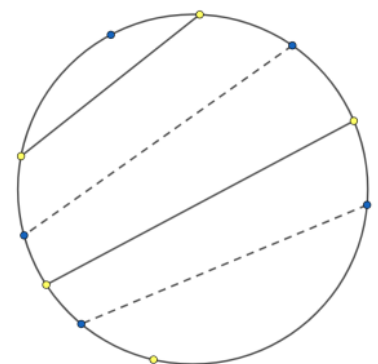
Відповідь: ні.

Розв'язання: Занумеруємо монети за рухом годинникової стрілки числами від 1 до 10. Тоді при кожному кроці перевертаються дві монети з непарними номерами. Таким чином парність кількості монет на непарних позиціях, що лежать донизу гербом зберігається. Якщо з самого початку кількість монет, які лежать гербом догори була непарна, то зробити щоби всі 10 монет були гербом догори неможливо.

3. Олексій відмітив на колі 20 жовтих та 20 синіх точок. Після цього Василь з'єднає відрізками точки одного кольору так, щоб ці відрізки не мали спільних точок. Яку найбільшу кількість відрізків зможе гарантовано провести Василь, якби ці точки не розставив по колу Олексій?

Відповідь: 19

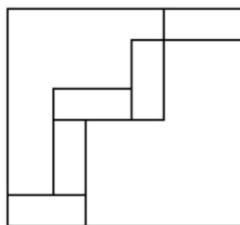
Розв'язання: Покажемо, що Василь завжди може провести не менше 19 відрізків. Якщо якісь дві точки одного кольору сусідні, то Василь з'єднає їх. Після цього ці точки та відрізок можна не розглядати, бо вони не впливають на інші відрізки. Якщо усі точки прибрані, то проведено 20 відрізків. Якщо точки лишилися, то їхні кольори чергуються. Після цього Василь обирає деяку точку, наприклад, А, і починає з'єднувати по черзі сусідні з А точки (рис. 1). Таким чином будуть проведені разом 19 відрізків.



(рис. 1)

Покажемо, що більшої кількості досягнути не вдасться. Олексій розставляє точки по черзі – жовта, синя, жовта, синя..., тоді будь-який відрізок, проведений Василем поділяє усі точки так, що по різні боки від неї – непарна кількість точок. А тому принаймні одна з точок не може бути з'єднана відрізком за правилами.

4. Всередині квадрата зі стороною 6 розмістили 5 однакових прямокутників, як це показано на малюнку (сторони прямокутників паралельні сторонам квадрата). Знайдіть площу одного такого прямокутника.



Відповідь: 2

Розв'язок: Нехай менша сторона прямокутника дорівнює x , а більша сторона - y .

Порахуємо проекції прямокутників на нижню сторону великого квадрата:

$$y + (y - x) + x + y = 6 \Leftrightarrow 3y = 6 \Leftrightarrow y = 2$$

Тепер так само рахуємо проекцію на бічну сторону великого квадрата:

$$x + y + y + x = 6 \Leftrightarrow 2x + 2y = 6 \Leftrightarrow x + y = 3 \Leftrightarrow x = 1$$

Порахуємо площу: $x \cdot y = 2 \cdot 1 = 2$

5. 9 дітей збирали горіхи у саду. Всі вони зібрали однакову кількість горіхів. Після цього вони склали ці горіхи у 3 кошики. В першому кошику на 6 кг горіхів менше, ніж у двох інших разом. А в другому — на 10 кг менше, ніж у двох інших разом. Яку найменшу кількість горіхів могли зібрати діти, і скільки кілограмів горіхів тоді було у кожному кошику?

Відповідь: 18 кг; 6 кг в першому, 4 кг в другому, 8 кг в третьому

Розв'язок: Позначимо за x масу горіхів в першому кошику, y - в другому і z - третьому.

Запишемо умову використовуючи нові позначення:

$$x + 6 = y + z$$

$$y + 10 = x + z$$

$$9 \mid (x + y + z)$$

Виразимо z через x та y з перших двох рівнянь:

$$z = x - y + 6$$

$$z = y - x + 10$$

Прирівняємо дві рівності:

$$x - y + 6 = y - x + 10$$

$$2x - 2y = 4$$

$$x - y = 2 \quad (1) \Rightarrow z = 8$$

Просумуємо всі змінні:

$$x + y + z = x + y + 8 = 2y + 10$$

$$9 \mid (2y + 10)$$

Ми повинні отримати найменшу суму, а значить $2y + 10$ повинне бути найменшим числом, яке ділиться на 9, тому $2y + 10 = 18 \Leftrightarrow y = 4$. Підставивши в умову (1) отримаємо те, що $x = 6$.