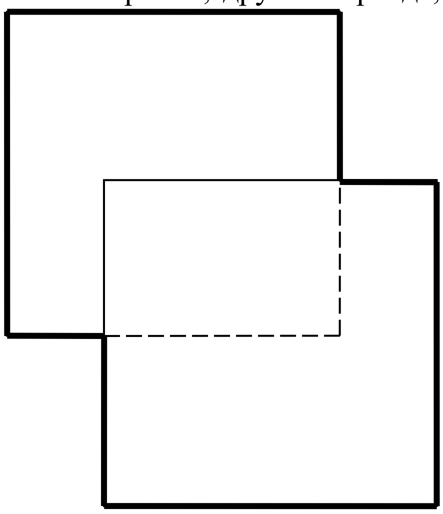
4-5 клас

1. У передвиборчому штабі можна було зустріти людей трьох типів – виборці, які завжди кажуть правду, кандидатів в депутати, які завжди брешуть, та помічників, у яких з кожних двох тверджень – одне правдиве, друге брехливе чи навпаки. Кореспондент поспілкувався стосовно того, хто є ким в штабі з трьома людьми. Ось які відповіді він отримав:
Петрик сказав: "Я – помічник." Далі додав: "Івасик – виборець."
Івасик сказав: "Я – виборець." І додав: "Грицько – помічник."
Грицько сказав: "Я – кандидат." І додав: "Петрик – помічник."
Чи можна з'ясувати, хто з 3-х опитуваних є ким? Не обов'язково серед них мають бути по одному представнику кожного типу людей зі штабу.

<u>Відповідь:</u> усі троє – помічники.
<u>Розв'язання.</u> Почнемо з відповідей Грицька. Його перша фраза про себе не може бути сказаною, якщо він виборець чи кандидат. Таким чином він помічник і ця частина фрази – неправда. Тобто його друга фраза правдива, і Петрик також помічник. У Петрика перша фраза про себе – правда, тому друга – брехня. Тобто Івасик не виборець. Перша фраза Івасика – брехня, друга – правда, тобто Івасик також помічник.

2. Два рівні квадрати, сторони яких доривнюють 6 см, перетинаються так, що накривають рівно по одному куту один одного (рис. 1) і їхнім перетином є прямокутник, довжини сторін якого дорівнюють цілому числу сантиметрів. Прямокутник закриває рівно третину площі кожного з квадратів. Який периметр має фігура, що утворилася в об'єднанні цих квадратів?

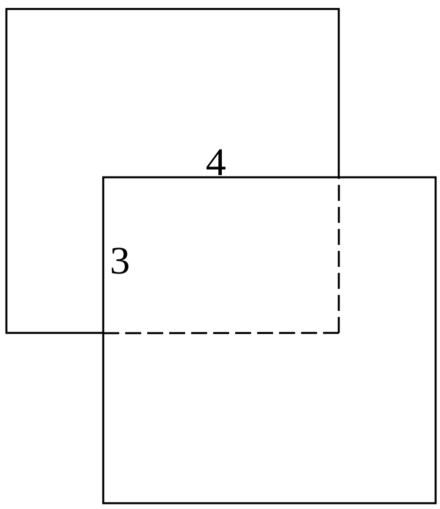
(5 клас, ВОМ для 5-7 класів 2018р.)



<u>Рис. 1</u>

<u>Відповідь:</u> 34.
<u>Розв'язання.</u>Третина від площі квадрату складає 12, тому це може бути прямокутник зі сторонами 12×1, 6×2 та 4×3. Очевидно, що лише останній варіант задовольняє умови задачі, в сенсі що квадрати перекриваються рівно по одній вершині кожного з них. Внаслідок симетричності картинки не принципово яка з сторін прямокутника дорівнює 3, яка 4 (рис. 2).
Тепер обчислимо шукане значення периметру фігури:

$$(2+6+6+3)\cdot 2=34.$$



<u>Рис. 2</u>

3. Рівносторонній трикутник зі стороною довжини 8 розділили на трикутнички зі стороною довжини 1 (рис. 3). Яку найменшу кількість трикутничків треба зафарбувати, щоб усі точки перетину ліній (в тому числі й ті, що по краях) були вершинами принаймні одного зафарбованого трикутничка?

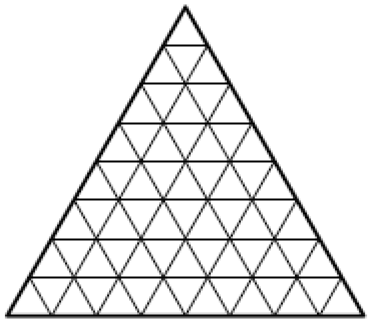


Рис. 3

Відповідь: 15.

***Розв'язання*.** Усього точок перетину, якщо порахувати зверху до низу по лініях рівно: $1+2+3+\ldots+9=45$, звідки зрозуміло, що треба зафарбувати щонайменше 15 трикутничків, бо кожен з них має рівно 3 вершини. Залишається навести приклад, що 15 цілком вистачає (рис. 4).

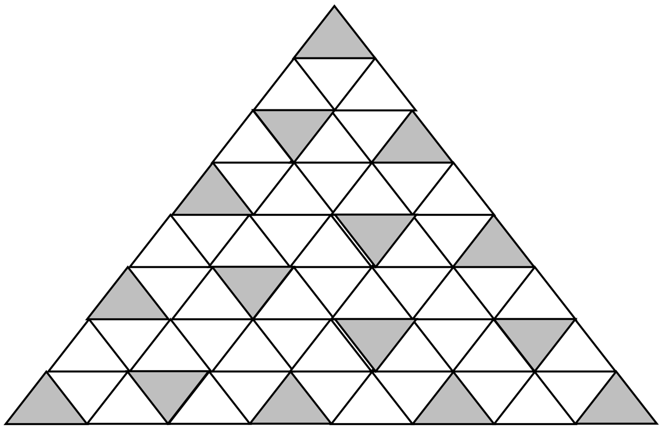


Рис. 4

4. На кожному кілометрі дороги між селами Іванків та Петрівка стоїть стовп з табличкою, на одному боці якого записано скільки кілометрів від стовпа до Іванкова, а на іншому боці – скільки кілометрів до Петрівки. Андрійко побачив, що сума усіх цифр, що записані з обох боків на кожному із стовпів, дорівнює 13. Якою може бути відстань між селами Іванків та Петрівка?

Відповідь: 49.

***Розв'язання*.** Тут варто подивитися, яке число може бути написаним на першому стовпчику. Нехай це $1-XX$. Очевидно, що це має бути двоцифрове число, бо для одноцифрового не вийде сума цифр 13, а для трицифрового колись зустрінеться табличка, де буде написане число 99, що суперечить умові.

Суму цифр 12 мають такі числа: 93, 84, …, 39. Залишається знайти серед них гідний (чи гідні) варіант. Одразу скажемо, що чинною є відповідь $1-48$, тобто відстань між селами 49.

Покажемо, що інші числа умови задачі не задовольняють. Позначимо друге число $\overline{ab}$. Якщо $b<8$, то розглянемо табличку, де до 1 додається $b+1$, а від $\overline{ab}$ віднімається $b+1$, тобто утвориться число $\overline{(a-1)9}$. Тоді мають справджуватися рівності: $1+a+b=13$ та $b+2+a-1+9=13$ – суперечність. Випадок 48 дає відповідь, а 39 призводить до суперечності з таким стовпчиком: $1-39 \Rightarrow 10-30$ – суперечність.

5. Є набір із 128 гир вагою 1 кг, 2 кг, …, 128 кг. На яку найменшу кількість купок їх можна поділити таким чином, щоб в жодній з купок не було двох гир, одна з яких важить удвічі більше за іншу?

Відповідь: 2.

***Розв'язання*.** Розіб'ємо усі гирі на ланцюжки за зростанням ваги, де кожна наступна має вагу у 2 рази більшу за попередню таким чином: $1-2-4-8-\ldots-128$, $3-6-12-\ldots-96$, $5-10-20-\ldots-80$, …, $63-126$, 65, 67, …, 127. Тобто кожна наступна група складається з найменшого непарного числа, яке ще не потрапило в жодний попередній ланцюжок, а завершується ланцюжками з одного непарного числа, що більші від 64. Далі з кожного ланцюжка розподіляємо по двох групах числа по черзі чим очевидно досягається шукана умова.

<u>6 клас</u>

1. Відомо, що одноцифрове число A не ділиться ні на 2, ні на 3. Для деякої цифри a число $\overline{Aa}$ ділиться на 2, число $\overline{Aaa}$ ділиться на 3, а число $\overline{Aaaa}$ ділиться на 4. Знайдіть усі можливі числа $\overline{Aa}$. ***(6 клас, ВОМ для 5-7 класів 2018р.)***

<u>Відповідь:</u> 14, 58 та 74.
<u>Розв'язання</u>. Цифра A може біти однією з трьох: 1; 5 або 7. Цифра a з ознаки подільності на 4 може бути тільки 0; 4 або 8, бо число $\overline{aa}$ має ділитися на 4. З ознаки подільності на 3 має ділитись на 3 число $A+a+a$. Умову задовольняють числа 144, 588 та 744, звідки знаходимо наведену відповідь.

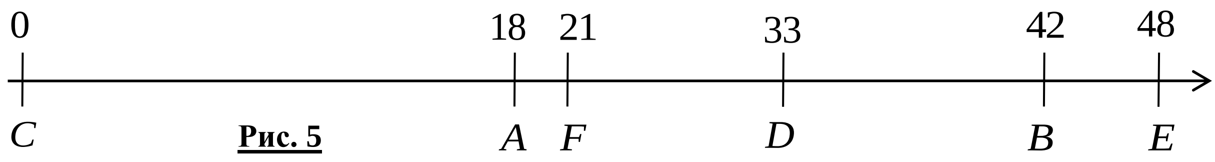
2. На карточці в кожного з 11 школярів написане деяке натуральне число. Відомо, що усі ці числа різні, а їхня сума дорівнює 71. Якщо усі числа дітей розташувати в рядок в порядку зростання, то яким може бути число, що стоятиме рівно посередині?

<u>Відповідь:</u> 6.
<u>Розв'язання</u>. Найменші числа можуть бути $1,2,\ldots,10$ і мають суму 55, тобто цей набір має доповнити число 16. Таким чином найменше середнє число – це 6.
Для числа 7 наступними найменшими числами можуть бути 8,9,10,11,12 і сума цих шести чисел дорівнює 57. Решта п'ять чисел мають давати суму 14 та не перевищувати 6. Цього не можна досягти на жодному наборі, оскільки вже сукупність найменших п'яти можливих чисел дає суму $1+2+3+4+5=15$.

3. Задача №4 4-5 клас.

4. На прямій у деякому порядку розташовані 6 точок A, B, C, D, E та F. Відомі такі відстані між точками: $AB=24$, $BC=42$, $CD=33$, $DE=15$ та $EF=27$. Якою може бути найбільша та найменша відстань AF при усіх можливих розташуваннях точок?

<u>Відповідь:</u> найбільша 141, найменша 3.
<u>Розв'язання</u>. Очевидно, що найбільша відстань не може перевищувати суми усіх вказаних відстаней, тобто $AE \le 24+42+33+15+27=141$. Це значення досягається при такому розташуванні точок на прямій зліва направо: A, B, C, D, E та F.



<u>Рис. 5</u>

Для найменшої відстані одразу зазначимо, що вона може складатися з наведених значень, що можуть бути взяті зі знаком $\pm$. При цьому це значення має бути кратним 3, оскільки усі доданки кратні 3. Крім того, з усіх відстаней три – непарні, тому й результат має бути непарним. Таким чином найменше можливе значення $AF=3$. Воно досягається при такому розташуванні точок як на рис. 5. Для зручності ми розташували числа на координатній прямій.

5. В коло стали 40 дітей і кожна дитина взяла за руку двох сусідніх дітей. Виявилося, що 22 з них тримали за руку хлопчика (принаймні однією рукою) та 30 тримали за руку дівчинку (також принаймні однією рукою). Скільки дівчат було в цьому колі?

<u>Відповідь:</u> 24.
<u>Розв'язання</u>. Частина дітей тримає двох дівчат, частина – двох хлопців, усі інші тримають однією рукою хлопчика, іншою – дівчинку. Оскільки усього дітей 40, а пораховано разом $30+22=52$ дитини, то двічі пораховано тих, хто тримає і хлопчика, і дівчинку одночасно. Таким чином є 12 таких дітей, звідси випливає, що лише дівчат тримають 18 дітей, лише хлопчиків – 10.
Порахуємо кожну руку дівчинки таким чином: хто тримає обома руками дівчат – множимо на 2, хто тримає однією рукою дівчинку – множимо на 1. Тоді ми порахуємо рівно 1 раз руку кожної дівчинки. Оскільки кожна дівчинка має рівно 2 руки, то одержану величину слід поділити навпіл, щоб отримати шукану кількість дівчат. Таким чином за нашими даними усього дівчат: $\frac{1}{2}(18\cdot 2+12)=24$.

<u>7 клас</u>

1. Відомо, що $a^2-bc=b^2-ac=c^2-ab\neq 0$. Яких значень може набувати вираз $\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}$?

<u>Відповідь:</u> -1.
<u>Розв'язання</u>. Перепишемо першу рівність у вигляді: $(a+b+c)(a-b)=0$. Аналогічно перетворимо інші дві рівності.
Якщо $(a+b+c)=0$, то $\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}=\frac{(-c)(-a)(-b)}{abc}=-1$.
Якщо $(a+b+c)\neq 0$, то $a=b=c$, тоді не виконується умова, що $c^2-ab\neq 0$.

2. Задача №5 6 клас.

3. Задача №2 6 клас.

4. Сума трьох, не обовязково різних, простих чисел дорівнює 23. Чому може дорівнювати добуток цих чисел? Вкажіть усі можливі відповіді.

<u>Відповідь:</u> 76, 153, 273, 325 та 385.
<u>Розв'язання</u>. Нехай $23=p+q+r$, де $p\le q\le r$. Проведемо перебір за простим числом p. Зрозуміло, що $p\le 7<\frac{23}{3}$.

$p=2$. Тоді $q+r=21$. Тоді одне з простих чисел, що лишилося – парне, тому $q=2,\ r=19$. Шуканий добуток $D=19\cdot 2\cdot 2=76$.

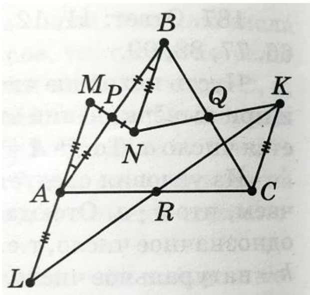
$p=3$. Тоді $q+r=20$. Тоді обидва простих числа непарні, розглянемо можливі варіанти:
$q=3,\ r=17$ – так, $q=5,\ r=15$ -- ні, $q=7,\ r=13$ – так.
Для можлмвих варіантів можливі такі добутки: $D=17\cdot 3\cdot 3=153$, $D=13\cdot 7\cdot 3=273$.

$p=5$. Тоді $q+r=18$. Розглянемо можливі варіанти:
$q=5,\ r=13$ – так, $q=7,\ r=11$ – так.
Для можливих варіантів можливі такі добутки: $D=13\cdot 5\cdot 5=325$, $D=11\cdot 7\cdot 5=385$.

$p=7$. Тоді $q+r=16$. Єдиний можливий варіант: $q=7,\ r=9$ – ні.

5. Точка M розташована зовні трикутника ABC. Точка N симетрична точці M відносно середини сторони AB, точка K симетрична точці N відносно середини сторони BC, а точка L симетрична точці K відносно середини сторони AC. Доведіть, що вершина A є серединою відрізка ML.

<u>Розв'язання</u>. Нехай $P, Q, R -$ середини сторін AB, BC, AC відповідно. $\Delta\, AMP = \Delta BNP$ ($MP = PN, AP = PB,$ за озн. симетрії; $\angle APM = \angle BPN,$ як вертикальні), тому $AM = NB,\ \angle MAP = \angle NBP,$ звідки $AM \parallel BN.$ Аналогічно, $NB = KC, NB \parallel KC$ і $KC = AL, KC \parallel AL.$ Отже, $AM = AL,$ $AM \parallel AL.$ Звідси випливає, що точки M і L співпадають або точка A є серединою відрізка ML.



Зауважимо, що якщо на відрізках AM, BN, CK, AL поставити стрілки відповідно в напрямках від A до M, від B до N, від C до K, від A до L, то стрілки на AM і BN протилежно напрямлені, стрілки на BN і CK напрямлені протилежно і стрілки CK і AL напрямлені протилежно. Тому стрілки на AM і AL напрямлені протилежно, отже точка A лежить між точками M і L і є серединою ML