Київський національний університет імені Тараса Шевченка

IX Київська міська олімпіада з математики для учнів 4–6 класів

«Математична вишиванка»

«Усяке рішення плодить нові проблеми»
Висновки з закону Мерфі

Умови та розв'язання завдань

4 клас

1. Оксана нарисувала 2021 абстрактних рисунків з квадратів сірого та білого кольорів. Кількість квадратиків послідовно збільшувалася як це показане на рис. 1. Скільки сірих квадратиків вона нарисувала на останньому 2021-му рисунку?

Відповідь: 2021.

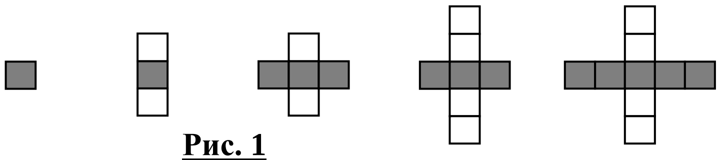

Рис. 1

Розв'язання. Складемо залежність кількості сірих квадратиків від номера рисунку. Рисунки 1–2 мають по 1 сірому квадрату. Рисунки 3–4 мають по 3 сірих квадрати. Рисунки 5–6 мають по 5 сірих квадратів. Якщо продовжити такі міркування, то матимемо, що рисунки 2019–2020 мають по 2019 сірих квадрати, а тому рисунок 2021 має 2021 сірий квадратик.

2. На день кібернетики кожний студент 4 курсу кафедри Обчислювальної математики подарував одну троянду квіточку кожній дівчинці-одногрупниці. Відомо, що дівчат в групі менше ніж хлопців і що подружки Катя та Заріна отримали щонайменше по одній троянді. Скільки студентів навчається в групі, якщо всього було подаровано 77 троянд?

Відповідь: 18.

Розв'язання. Нехай було b хлопців та g дівчат, тому $bg = 77$. З умов задачі зрозуміло, що $b = 11$, а $g = 7$, бо інакше або дівчат було б або більше ніж хлопців, або дівчинка була б 1, що суперечить умові. Таким чином в групі навчалося $11 + 7 = 18$ студентів.

3. По колу стоять 2020 учнів, у кожного з яких є певна кількість кульок. У певний момент вони послідовно почали передавати один одному кульки за такими правилами. Другий передав першому стільки своїх кульок, скільки в того було перед тим. Далі третій передав другому стільки кульок, скільки на цей момент було в другого. І так далі, четвертий передав третьому стільки своїх кульок, скільки в того було, …, 2020-й передав за таким правилом кульки 2019-му, а насамкінець, перший передав за таким правилом кульки 2020-му. Виявилося, що по завершенні кількість кульок в жодного з учнів не змінилася. Відомо, що на початку найменшу кількість кульок мав учень з 2021 кулькою. Скільки кульок було з самого початку у того школяра, який мав їх найбільшу кількість?

Відповідь: 4042

Розв'язання. Нехай школярі позначені як A_1, A_2, …, A_{2020}. Нехай у учня A_i на початку було a_i кульок, $i = \overline{1,2020}$. За умовою, $a_2 > a_1$, після першого кроку у A_2 стане $a_2 - a_1$ кульок. Тоді за умовою, $a_3 > a_2 - a_1$ і у A_2 стане $2(a_2 - a_1)$. Тоді надалі в A_2 кількість кульок не зміниться, тому $2(a_2 - a_1) = a_2 \Rightarrow a_2 = 2a_1$. Для зручності позначимо $a_1 = a$, тобто $a_2 = 2a$. Таким чином зміни кількості кульок записуються для A_2: $a_2 = 2a \rightarrow a_2 - a = a \rightarrow a + a = 2a = a_2$. Аналогічно розглянемо для A_3: $a_3 \rightarrow a_3 - a \rightarrow 2(a_3 - a) = a_3 \Rightarrow a_3 = 2a$. Неважко збагнути, що те саме справджується так само для усіх $i = \overline{2,2020}$. Залишається перевірити, що так само умова справджується і для A_1: $a_1 = a \rightarrow 2a \rightarrow 2a - a = a = a_1$.
Таким чином в усіх дітей, окрім першого було $2a$ кульок, тобто парна кількість. А у A_1 було a кульок, тобто це єдина можливість, щоб мати непарну кількість кульок, тому $a = 2021$. Максимальна кількість кульок – це $2a = 4042$.

4. У Петрика в кишені можуть бути монети номіналом у 1 грн, 2 грн, 5 грн та 10 грн. Якщо Петрик навмання витягне з кишені 3 монети, то серед них обов'язково знайдеться монета в 1 грн. Якщо Петрик навмання витягне з кишені 4 монети, то серед них обов'язково знайдеться монета в 2 грн. Петрик витягнув з кишені 5 монет. Назвіть, які це монети. Яка максимальна сума грошей в нього може бути в кишені?

Відповідь: 3 монети номіналом в 1 грн. та 2 номіналом в 2 грн., усього в нього 7 грн.
Розв'язання. Зрозуміло, що в кишені не може бути більше двох монет номіналом не в 1 грн., бо інакше він міг витягнути саме такі 3 монети. Тобто невідомий номінал лишився лише в двох монет. З 5 монет там принаймні 3 номіналом в 1 грн., якщо припустити, що там є монета номіналом не в 2 грн., то він міг витягнути цю монету та 3 номіналом в 1 грн., і знову порушилися б умови. Таким чином в нього там рівно 5 монет, з яких 3 номіналом в 1 грн. та 2 номіналом в 2 грн.
З наведених міркувань зрозуміло, що це усі монети з його кишені, бо інакше, якщо там було б 6 монет, то, або там було б принаймні 4 монети номіналом в 1 грн. і це порушилоб першу умову задачі, або принаймні 3 монети номіналом відмінним від 1 грн., і це порушило б другу умову. Таким чином в Петрика усього є 7 грн.

5 клас

1. На острові, де живуть лицарі, які завжди кажуть правду, та брехуни, які завжди брешуть, зустрілися 3 місцевих мешканці: Петрик,Василько та Івасик. Петрик сказав кожному з них, що той брехун. Ким би назвав Івасик Василя? Відповідь обґрунтуйте.

Відповідь: лицарем.
Розв'язання. Якщо Петрик – лицар, то Івасик та Василь – брехуни, тому Івасик мав збрехати про Василя і назвав би його лицарем.
Якщо Петрик – брехун, то Івасик та Василь – лицарі, тому Івасик назве Василя лицарем.

2. Задача № 3 для 4 класу.

3. Петрик нарисував на папері в клітинку прямокутник P по лініях сітки. Після цього він нарисував таку прямокутну рамку навколо прямокутника P: з двох боків сторони рамки відстоять на 1 клітинку від відповідної сторони прямокутника P, а з двох інших боків сторони рамки відстоять на 2 клітинки від відповідної сторони P. Виявилося, що площа прямокутника P дорівнює площі рамки (рис. 2). Яку найбільшу та найменшу площу за таких умов може мати цей прямокутник P?

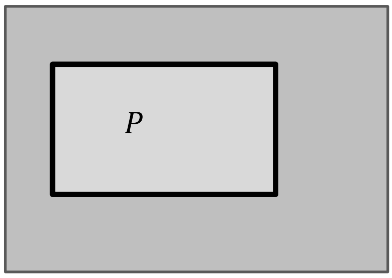

Рис. 2

Відповідь: найбільша площа 84, найменша площа 48.
Розв'язання. Позначимо сторони прямокутника P через a, b, тоді зовнішній прямокутник може мати такі варіанти довжин сторін.

1 Варіант. Довжини сторін дорівнюють $a+3, b+3$. Звідси маємо рівність:
$ab = (a+3)(b+3) - ab \Rightarrow ab = 3a + 3b + 9 \Rightarrow (a-3)(b-3) = 18.$
Маємо такі випадки (без обмеження загальності можна вважати, що $a \le b$).
Випадок 1. $a-3 = 1, b-3 = 18 \Rightarrow a = 4, b = 21 \Rightarrow ab = 84.$
Випадок 2. $a-3 = 2, b-3 = 9 \Rightarrow a = 5, b = 12 \Rightarrow ab = 60.$
Випадок 3. $a-3 = 3, b-3 = 6 \Rightarrow a = 6, b = 9 \Rightarrow ab = 54.$

2 Варіант. Довжини сторін дорівнюють $a+2, b+4$. Звідси маємо рівність:
$ab = (a+2)(b+4) - ab \Rightarrow ab = 4a + 2b + 8 \Rightarrow (a-2)(b-4) = 16.$
Маємо такі випадки.
Випадок 1. $a-2 = 1, b-4 = 16 \Rightarrow a = 3, b = 20 \Rightarrow ab = 60.$
Випадок 2. $a-2 = 2, b-4 = 8 \Rightarrow a = 4, b = 12 \Rightarrow ab = 48.$
Випадок 3. $a-2 = 4, b-4 = 4 \Rightarrow a = 6, b = 8 \Rightarrow ab = 48.$
Випадок 4. $a-2 = 8, b-4 = 2 \Rightarrow a = 10, b = 6 \Rightarrow ab = 60.$
Випадок 5. $a-2 = 16, b-4 = 1 \Rightarrow a = 18, b = 5 \Rightarrow ab = 80.$

4. Скільки натуральних чисел $n \le 2021$ задовольняють такі умови: n ділиться на 4, $n+1$ ділиться на 5 та $n+2$ ділиться на 6?

Відповідь: 34.
Розв'язання. Очевидно, що ці числа йдуть на однакових відстанях одне від іншого, що випливає з періодичності остач при діленні на усі числа. Оскільки остачі мають враховуватися при діленні на 4, 5 та 6, тому вони йдуть з кроком $[4,5,6] = 60$ (НСК). Перше шукане число – це 4. Наступне, очевидно $4 + 60 = 64$. Загальний їхній вигляд $4 + 60k$. Знайдемо останнє: $4 + 60k \le 2021 \Rightarrow 60k \le 2017 \Rightarrow k \le 33$. Таким чином усіх чисел 34.

5. Робот знаходиться у точці координатної прямої з координатою $p = \frac{m}{2020}$, де $0 < m < 2020$, і може рухатися ліворуч та праворуч вздовж цієї прямої. Два гравці грають у таку гру: на кожному ході Андрій задає відстань, Петрик – напрямок руху, і робот рухається вказаним чином з точки свого теперішнього перебування. Андрій виграє, якщо робот у якийсь момент потрапить у точку $X = 0$ чи $Y = 1$, Петрик переможе, якщо завадить виграти Андрію. При яких значеннях m у цій грі переможе Андрій, якщо вона може тривати достатню кількість часу?

Відповідь: Андрій переможе, якщо $m = 505$, 1010 або 1515, інакше перемагає Петрик.
Розв'язання. Якщо координата точки P дорівнює $p = \frac{m}{2^n}$, $m < 2^n$, де m, n – натуральні числа, то перемагає Андрій. Без обмеження загальності вважатимемо, що m – непарне. Тоді Андрій обирає відстань $\frac{1}{2^n}$. Тоді робот потрапить у точку $\frac{m-1}{2^n}$ або $\frac{m+1}{2^n}$. Якщо Андрій ще не переміг, тобто не потрапив в одну з бажаних точок, то нова координата робота стане $\frac{k}{2^l}$, де $k < 2^l$ та $l < n$. Продовжуючи аналогічно, ми бачимо, що знаменник спадає і в певний момент досягне значення 1, у той час як чисельник може стати рівним або 0, або 1, тобто Андрій переможе. Покажемо, що для усіх інших випадків перемагає Петрик.
Якщо $p \notin (0; 1)$ але не має форму $\frac{m}{2^n}$, то для довільного $d > 0$ принаймні одне з чисел $p \pm d$ так само не матиме таку форму (інакше і p мало б таку форму), тому Петрик завжди може обрати напрямок руху, при якому робот не потрапить в точку X чи Y.
В наших умовах, оскільки $2020 = 505 \cdot 2^2$, то щоб у знаменнику був степінь числа 2, треба, щоб в чисельнику було число, що кратне 505.

6 клас

1. У маленькому містечку є кільцева трамвайна лінія, по якій трамваї ходять в обох напрямах. На цьому трамвайному кільці є зупинки А, Б та В. Відомо, що шлях від зупинки Б до В через зупинку А утричі довший, ніж не через А. а шлях від А до В через Б удвічі коротший, ніж не через Б. Який шлях від зупинки Б до А коротший і у скільки разів: через В чи не через В?

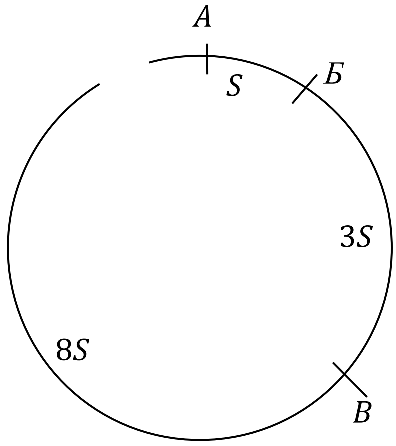

Рис. 3

Відповідь: шлях АВБ у 11 разів довший ніж АБ.
Розв'язання. Для зручності позначимо довжину усього маршруту через $12S$, тоді з умов задачі відстані АБВ дорівнює $4S$, а АВ – $8S$. Так само з'ясовуємо, що БАВ дорівнює $9S$, а БВ – $3S$ (рис. 3). Тоді легко зрозуміти, що АБ – це S, а АВБ – $11S$

2. Петрикова колекція футбольних та волейбольних м'ячів нараховує всього 30 екземплярів. Відомо, що серед будь-яких 12 м'ячів цієї колекції є принаймні один футбольний, а серед будь-яких 20 м'ячів є принаймні один волейбольний. Яку найбільшу кількість волейбольних м'ячів може мати колекція Петрика?

Відповідь: 11.
Розв'язання. Якщо волейбольних м'ячів максимум 10, то достатньо Петрику взяти інші 20 м'ячів і умова порушена. Тому волейбольних м'ячів мінімум 11. Якщо їх буде 12, то взявши їх усі, порушиться перша умова задачі. Тому їх рівно 11.

3. Задача № 3 для 5 класу.

4. Задача № 5 для 5 класу.

5. Зірка баскетболу Стефен Каррі з початку гри здійснив 25 кидків з відсотком влучання 64%. Після ще зроблених ним d кидків відсоток влучань враховуючи усі кидки склав 75%, а по завершенню гри, коли він здійснив ще d кидків, відсоток влучань для усіх зроблених кидків склав 60%. Яку найменшу кількість кидків здійснив Каррі за усю гру?

Відповідь: 55.
Розв'язання. З перших 25 кидків було 16 влучань. d – кількість кидків у другій та третій частинах, нехай a та b – кількість влучань у другій та третій частинах гри. Тоді:

$$\frac{16+a}{25+d} = \frac{75}{100} = \frac{3}{4} \text{ та } \frac{16+a+b}{25+2d} = \frac{60}{100} = \frac{3}{5} \Rightarrow$$

$$11 + 3d = 4a \text{ та } 6d = 5 + 5a + 5b.$$

З другого рівняння $d = 5m$, тоді $4a = 11 + 15m$. Найменше m, для якого $11 + 15m \vdots 4$ – це $m = 3$. Тоді $d = 15$, $a = 14$ та $b = 3$, тому найменша кількість кидків – $25 + 2d = 55$