II тур відкритої олімпіади з математики Львівського фізико-математичного ліцею для учнів 4–7 класів

"Зробив наспіх, як насміх"
Українське прислів'я

Розв'язання завдань

4 клас

1. З 1 січня 2020 року Оксана кожного дня на балконі виставляла жовтий чи синій прапорець. Які прапори були виставлені у перші два дні цього року не відомо, але починаючи з 3 січня вони виставлялися за таким правилом: виставляється жовтий прапор, якщо перед цим останні два дні виставлялися прапори різного кольору, відповідно, виставляється синій прапорець, якщо прапори були однакового кольору. Відомо, що 14 січня вона за цими правилами виставила синій прапорець. Чи можна за таких умов з'ясувати, який прапорець вона виставляла 29 січня?

Відповідь: синій.
Розв'язання. Оскільки 14 січня виставлений синій прапорець, то перед тим два дні колір був однаковий. Для зручності введемо позначення: b – синій прапорець y – жовтий прапорець.
Якщо то був b, b, то після того кожного дня будуть два однакові кольори .
Якщо то був y, y, то надалі маємо, що йде така послідовність кольорів по днях:

$$12 - y, 13 - y, 14 - y, 15 - y, 16 - y, 17 - y$$

Таким чином синій прапорець виставлявся у такі дні: $14, 17, 20, 24, 26, 29_{\dots}$ Усі інші дні – колір прапорця був жовтим. Таким чином за обох варіантів вона 29 січня мала виставити синій прапорець.

2. У кімнаті сиділи діти, кожний на своєму стільці, що має 4 ніжки, або на табуретці, яка має 3 ніжки. Вчителька порахувала, що разом з дитячими ніжками, усього їх 39. Скільки дітей в кімнаті ?

Відповідь: у кімнаті 7 дітей.
Розв'язання. Якщо розглянути стілець і дитину, то вони дають в загальну суму 6«ніжок», а табуретка з дитиною – 5. Якби в кімнаті стояли лише стільці, то кожного разу ми б рахували по 6 «ніжок» – за стільчик та дитину. Але оскільки 39 не ділиться на 6, тоді найбільше ми могли б так посадити шістьох дітей і ще 3 «ніжки» із загальної суми лишились би. Якщо від кількості «ніжок», які ми розподілили на дітей на стільчиках, забрати три «ніжки» (по одній з трьох пар «дитина-стільчик») і віддати їх до тих трьох «ніжок», що лишились, то матимемо ще одну дитину, яка сидить на стільчику. А серед тих шести вже троє будуть сидіти на стільчиках, а троє – на

табуретках. Повторити таку дію ще раз не вийде, оскільки інакше кількість «ніжок» у парі буде невідповідна. Таким чином у кімнаті було семеро дітей.

Альтернативне розв'язання. Якщо розглянути стілець, то він дає в загальну суму 6 ніжок, а табурет – 5. Таким чином маємо таке рівняння: $6a + 5b = 39 \Rightarrow$ тоді b ділиться на 3, але не ділиться на 6. Тому $b = 3$. Випадок $b \geq 9$ очевидно неможливий. При $b = 3$ матимемо, що $a = 4$. Таким чином у кімнаті 7 дітей.

3. У хмарочосі, де на кожному поверсі розташовано рівно по 12 квартир провели наскрізну їхню нумерацію. Але господар будівлі ненавидів цифру 7, тому при нумерації були пропущені усі номери, що діляться на 7. По завершенні такої нумерації було визначено, що вона не дуже вдала, тому кожна квартира отримала два номери – перше число означало поверх, друге число – номер квартири на поверсі від 1 до 12. Який буде номер квартири, що мала у попередній нумерації номер 2020?

Відповідь: 14504.
Розв'язання. Спочатку подивимося, скільки номерів квартир було вилучено: якщо ми забирали кожну сьому квартиру, то найбільше ми могли вилучити $2020 \div 7 = 228(\text{ост.} 4)$, тобто 228 квартир були викреслені, таким чином квартира за номером 2020 насправді мала номер $2020 - 228 = 1732$. Тепер можемо знайти її поверх та номер на поверсі, для цього ще раз виконаємо ділення з остачею $1732 \div 12 = 144(\text{ост.} 4)$, тобто вона розташована на 145 поверсі і мала номер 4.

4. П'ятицифрове число n називається *суперпростим*, якщо його не можна подати у вигляді добутку двох трицифрових чисел. Скільки максимум суперпростих чисел можуть йти поспіль?

Відповідь: 99.
Розв'язання. Розглянемо два найменших не суперпростих числа: $100 \times 100 = 10000$ та $100 \times 101 = 10100$. Між ними усі числа – суперпрості, але між ними рівно 99 чисел: $10001, 10002, \dots, 10099$
Зрозуміло, що більше ніж 99 таких чисел бути не може, бо серед 100 чисел, що йдуть поспіль, одне точно завершується на 00 а тому ділиться на 100, другий множник виходить з цього п'ятицифрового числа викреслюванням цих двох нулів, а тому є трицифровим.

5 клас

1. Ангеліна, Богдана, Валерія, Ганна та Дарина зустрілися 1 березня 2019 року і порахували, що їхній середній вік складає 28 років. Рівно за рік, 1 березня 2020 року, вони зібралися знову вп'ятьох, але замість Дарини була Елеонора. Виявилося, що у нової компанії середній вік складає вже 30 років. Хто з дівчат – Дарина чи Елеонора – старша і на скільки років?

Відповідь: Елеонора на 5 років старша за Дарину.
Розв'язання. Позначимо через x суму років на 1 березня 2019 року чотирьох дівчат без Дарини, через y та z – вік Дарини та Елеонори відповідно на той момент. Тоді $\frac{x+y}{5} = 28$ та $\frac{x+z+5}{5} = 30 \Rightarrow x + y = 140$ та $x + z = 150 - 5 = 145$ $x + z = 150 - 5 = 145$. Таким чином $z = y + 5$, тобто Елеонора на 5 років старша за Дарину.

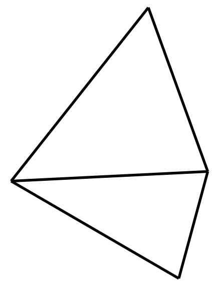
Рис. 7

2. У хмарочосі, де на кожному поверсі розташовано рівно по 12 квартир провели наскрізну їхню нумерацію. Але господар будівлі ненавидів цифру 7, тому при нумерації були пропущені усі номери, що діляться на 7. По завершенні такої нумерації було визначено, що вона не дуже вдала, тому кожна квартира отримала два номери – перше число означало поверх, друге число – номер квартири на поверсі від 1 до 12. Який буде номер квартири, що мала у попередній нумерації номер 2020?

Відповідь: 14504.
Розв'язання. Спочатку подивимося, скільки номерів квартир було вилучено: якщо ми забирали кожну сьому квартиру, то найбільше ми могли вилучити $2020 \div 7 = 228(\text{ост.} 4)$, тобто 228 квартир були викреслені, таким чином квартира за номером 2020 насправді мала номер $2020 - 228 = 1732$. Тепер можемо знайти її поверх та номер на поверсі, для цього ще раз виконаємо ділення з остачею $1732 \div 12 = 144(\text{ост.} 4)$, тобто вона розташована на 145 поверсі і мала номер 4.

3. Чотири села A, B, C, D з'єднані автомагістралями, як показано на рис. 7. При цьому водії кажуть, що на маршруті $A \to B \to C$ та на маршруті $B \to C \to D$ є по 10 ям, на маршруті $A \to B \to D$ є 22 ями, а на маршруті $A \to D \to B$ – 45 ям. Туристи хочуть дістатися від села A до села D так, щоб на їхньому шляху було якомога менше ям. За яким маршрутом їм слід рухатися?

Відповідь: . $A \to B \to C \to D$
Розв'язання. Розглянемо усі три можливі маршрути від A до D: $A \to D$, $A \to B \to D$ та $A \to B \to C \to D$. Про другий з них відомо, що на маршруті $A \to B \to D$ є 22 ями. Тому на $B \to D$ їх не більше 22, тому на автомагістралі $A \to D$ ям не менше 23. Таким чином перший маршрут точно не найкращий. На $A \to B \to C$ є 10 ям, тому на $A \to B$

їх не більш 10, тому на $B \to D$ їх не менше 12. Але на шляху $B \to C \to D$ їх усього 10, тому він кращий за ділянку $B \to D$. Звідси й маємо, що наведений у відповіді маршрут є найкращим.

4. Квадрат 4×4 розрізаний на 16 одиничних квадратиків 1×1. Скількома різними способами можна зафарбувати два одиничних квадратики з 16? Вважатимемо різними усі такі розташування зафарбованих квадратиків, які не можна сумістити поворотами квадрату 4×4. (*На рис. 8 усі три випадки є однаковими, а тому рахуються як один*).

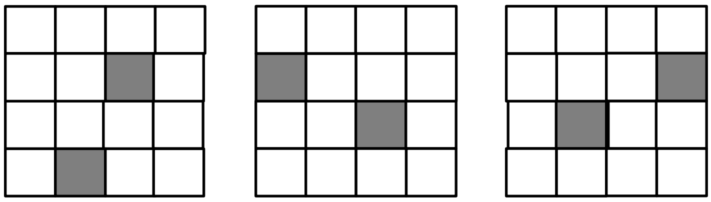

Рис. 8

Відповідь: 21.

Розв'язання. Треба розбити задачу на випадки, щоб усі врахувати та виключити повтори.

1. Один з квадратів (чорний) розташований в куточку (рис. 9). Тоді існує 9 розташувань другого квадрату, які не мають повторів. Вони показані сірим на рис. 9.

2. Далі у кутах не може бути квадрату. Нехай один з квадратів (чорний) розташований по периметру, але не в куті (рис. 10). Таких варіантів 10.

3. Лишається, що усі зафарбовані квадратики всередині. Тут лише 2 різні позиції (рис. 11).

Загалом маємо 21 варіант.

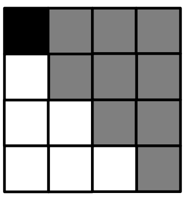

Рис. 9

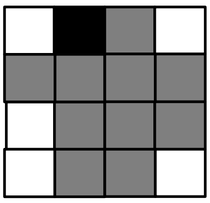

Рис. 10

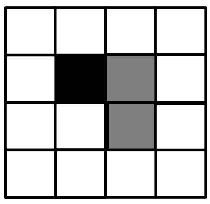

Рис. 11

<u>6 клас</u>

1. Ангеліна, Богдана, Валерія та Ганна зустрілися 1 березня 2019 року і порахували, що їхній середній вік складає 28 років. Відомо, що вони усі різного віку і наймолодшою з них є Ангеліна. Рівно за рік 1 березня 2020 року вони зібралися знову, але вже утрьох – без Ганни. При цьому виявилося, що у нової компанії середній вік складає вже 29 років. Скільки років найбільше могла мати на цей момент Ангеліна?

<u>Відповідь</u>: 27 років.
<u>Розв'язання</u>. Позначимо через x суму років на 1 березня 2019 року трьох дівчат без Ганни, через y – вік Ганни на той момент. Тоді $\frac{x+y}{4} = 28$ та $\frac{x+3}{3} = 29 \Rightarrow x + y = 112$ та $x = 87 - 3 = 84$. Таким чином вік Ганни був $y = 112 - 84 = 28$, а сума років інших трьох дівчат складає 84 роки. Покажемо, що найбільше Ангеліна на той момент могла мати 26 років. Якщо припустити, що вік Ангеліни не менше ніж 27 років, то інші дівчата мають мати вік не менше ніж 29 та 30 років. Але тоді сума їхніх років складає щонайменше 86 років, що неможливо. Якщо у був Ангеліни вік 26 років, то Богдана могла б мати вік 27 років, а Валерія $84 - 26 - 27 = 31$ рік, що не призводить до суперечностей. Таким чином <u>на цей</u> момент Ангеліна може мати щонайбільше 27 років.

2. У хмарочосі, де на кожному поверсі розташовано рівно по 12 квартир провели наскрізну їхню нумерацію. Але господар будівлі ненавидів цифру 7, тому при нумерації були пропущені усі номери, що діляться на 7. По завершенні такої нумерації було визначено, що вона не дуже вдала, тому кожна квартира отримала два номери – перше число означало поверх, друге число – номер квартири на поверсі від 1 до 12. Який буде номер квартири, що мала у попередній нумерації номер 2020?

<u>Відповідь</u>: 14504.
<u>Розв'язання</u>. Спочатку подивимося, скільки номерів квартир було вилучено: якщо ми забирали кожну сьому квартиру, то найбільше ми могли вилучити $2020 \div 7 = 228(\text{ост.} 4)$, тобто 228 квартир були викреслені, таким чином квартира за номером 2020 насправді мала номер $2020 - 228 = 1732$. Тепер можемо знайти її поверх та номер на поверсі, для цього ще раз виконаємо ділення з остачею $1732 \div 12 = 144(\text{ост.} 4)$, тобто вона розташована на 145 поверсі і мала номер 4.

3. Чи можна 20 гирьок вагою 1 г, 2 г, …, 20 г розкласти на 5 купок з різною кількістю гирьок таким чином, щоб справджувалася умова – чим менше в купці гирьок, тим сумарна маса усіх цих гирьок більша?

<u>Відповідь</u>: ні.
<u>Розв'язання</u>. Сума ваг усіх гирьок дорівнює $1 + 2 + 3 + \cdots + 20 = 210$. У найбільшій купці має бути маса, більша від середнього арифметичного в усіх купках, тобто більше 42. Таким чином у першій купці має бути не менше 3 гирьок, тоді у 2-й купці – не менше 4 гирьок, у 3-й купці не менше 5 гирьок, у 4-й купці не менше 6 гирьок, у

5-й купці – не менше 7 гирьок. Тому разом мінімум нам треба мати $3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 25$ гирьок, а їх усього 20. Одержана суперечність показує, що таке неможливо.

4. На острові живуть лише лицарі, які завжди кажуть правду, та брехуни, які завжди брешуть. Іноземець зустрів 5 місцевих жителів – А, Б, В, Г та Д. Він знає, що рівно 4 з них лицарі. Вони сказали такі фрази.

А: Усі брехуни мають 40-й розмір взуття.

Б: Усі люди з розміром взуття 40 мають золоту рибку.

В: Усі люди, що мають золоту рибку – брехуни.

Г: Я ношу взуття розміром 40.

Д: В мене є золота рибка.

Хто з цих жителів може бути брехуном? Вкажіть усі можливі відповіді.

Відповідь: В.

Розв'язання. Якщо брехун А, то є брехуни, що не мають 40-й розмір взуття. І усі інші висловлювання правдиві. Тоді з "Б" усі люди з розміром взуття 40 – мають золоту рибку, з "В" – вони усі брехуни. Але тоді Г – брехун, що призводить до суперечності. Якщо брехун Б, то не усі люди з 40-м розмір взуття мають золоту рибку, але це суперечить висловлюванням "А" та "В".

Якщо брехун В, то до суперечності це не призводить.

Якщо брехун Г, то це суперечить висловлюванням "А".

Якщо брехун Д, то в нього немає золотої рибки. З "А" він має 40-й розмір взуття, тому з "Б" він має мати золоту рибку – суперечність.

<u>7 клас</u>

1. Чи можна 20 гирьок вагою 1 г, 2 г, …, 20 г розкласти на 5 купок з різною кількістю гирьок таким чином, щоб справджувалася умова – чим менше в купці гирьок, тим сумарна маса усіх цих гирьок більша?

<u>Відповідь:</u> ні.
<u>Розв'язання.</u> Сума ваг усіх гирьок дорівнює $1 + 2 + 3 + \cdots + 20 = 210$. У найбільшій купці має бути маса, більша від середнього арифметичного в усіх купках, тобто більше 42. Таким чином у першій купці має бути не менше 3 гирьок, тоді у 2-й купці – не менше 4 гирьок, у 3-й купці не менше 5 гирьок, у 4-й купці не менше 6 гирьок, у 5-й купці – не менше 7 гирьок. Тому разом мінімум нам треба мати $3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 25$ гирьок, а їх усього 20. Одержана суперечність показує, що таке неможливо.

2. На площині розташовано 4 точки A, B, C, D. Відомо, що $AB = CD = x, BC = 2a$, $AD = 2b$, причому $x = b - a$. Доведіть, що середини AD і BC співпадають.
<u>Розв'язання.</u> Зауважимо, що $AB + BC + CD = AD$. Отже, за нерівностями трикутника випливає, що точки A, B, C, D лежать на одній прямій. Тепер достатньо зауважити, що оскільки $AB = CD$ і M – середина BC, то $AM = AB + BM = CM + CD = DM$.

3. У хмарочосі, де на кожному поверсі розташовано рівно по 12 квартир провели наскрізну їхню нумерацію. Але господар будівлі ненавидів цифру 7, тому при нумерації були пропущені усі номери, що діляться на 7. По завершенні такої нумерації було визначено, що вона не дуже вдала, тому кожна квартира отримала два номери – перше число означало поверх, друге число – номер квартири на поверсі від 1 до 12. Який буде номер квартири, що мала у попередній нумерації номер 2020?

<u>Відповідь:</u> 14504.
<u>Розв'язання.</u> Спочатку подивимося, скільки номерів квартир було вилучено: якщо ми забирали кожну сьому квартиру, то найбільше ми могли вилучити $2020 \div 7 = 228(\text{ост.}\,4)$, тобто 228 квартир були викреслені, таким чином квартира за номером 2020 насправді мала номер $2020 - 228 = 1732$. Тепер можемо знайти її поверх та номер на поверсі, для цього ще раз виконаємо ділення з остачею $1732 \div 12 = 144(\text{ост.}\,4)$, тобто вона розташована на 145 поверсі і мала номер 4.

4. Відомо, що для натуральних чисел a, b, c виконується рівність :
$a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$. Доведіть, що:
а) $a + b + c$ ділиться на 3;
b) $a + b + c$ ділиться на a.
<u>Розв'язання.</u> Зауважимо, що
$a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca \Rightarrow \frac{1}{2}((a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2) = 0$, оскільки квадрат числа завжди більше рівний нуля, то кожен з цих квадратів дорівнює нулю.

Тоді $a = b = c$. Отже, $a + b + c = 3a$, що ділиться на 3, і на a.

5. Скільки усього існує пар циф (a, b), для яких вираз $\overline{5a68} \times \overline{865b}$ ділиться націло на 824?

<u>Відповідь:</u> 19.

<u>Розв'язання</u>. Розкладемо на множники число $824 = 4 \times 206 = 8 \times 103$. Таким чином принаймні одне з цих чисел має ділитися на 103. Випишемо усі чотирицифрові числа, що діляться на 103 та починаються з цифри 5 і закінчується на 8, або починаються з цифри 8.

$5000 \div 103 > 48.5$, тому перше таке число $103 \times 49 = 5047$ $103 \cdot 49 = 5047$. Щоб число закінчувалося на 8, то остання цифра другого множника дорівнює 6: $103 \times 56 = 5768$. Таким чином один з множників може бути 5768 при $a = 7$. Але тоді це число вже само ділиться на 824. Тому цифра b може бути будь-якою, тобто розв'язками є усі такі пари: $(7, 0), (7, 1), \dots, (7, 9)$

$8650 : 103 > 83{,}9$ $8650 \div 103 > 83.9$, тому умову може задовольняти число $\overline{865b} \div 103 = 84$ при $b = 2$. Але тоді це число ділиться також і на 4. Тому інший добуток має бути парним, що справджується для усіх можливих значень a. Таким чином усього таких пар ще 10: $(0, 2), (1, 2), \dots, (9, 2)$.

Бачимо, що тут пара $(7, 2)$ входить в обидва переліки, тому усього таких пар 19.