# Олімпіада. 9 клас.

17.10.2015

1. Відомо, що $x\_{1}, x\_{2}$ - корені многочлена $P\left(x\right)=x^{2}+ax+b$, а $x\_{1}^{2}-\frac{1}{2}$ та $x\_{2}^{2}-\frac{1}{2}$ - корені многочлена $P\left(x\right)=x^{2}+\left(a^{2}-\frac{1}{2}\right)x+(b^{2}-\frac{1}{2})$. Знайти можливі значення $a$ та $b$.

2. У комітеті утворили 4 підкомітети, кожним з яких керують по 3 людини з комітету. Для узгодження їхніх дій, кожні два підкомітети серед керівників мають рівно одного спільного члена. Яка найменша кількість людей може бути в комітеті?

3. У колі проведена хорда $AB$, на якій обрано точку $P$ так, що $AP=2PB$. Хорда $DE$ перпендикулярна до хорди $AB$ і проходить через точку $P$. Довести, що середина відрізка $AP$ є точкою перетину висот трикутника $AED$.

4. З множини $\{10,11,…,19\}$ вибрали 5 різних чисел, з множини $\{90,91,…,99\}$ також вибрали 5 різних чисел. Виявилось, що різниця жодних двох чисел з десяти вибраних не кратна 10. Знайдіть суму всіх 10 вибраних чисел.

5. Числа $x\_{1},x\_{2},…,x\_{2015}$ одночасно задовольняють умови:

$x\_{1}^{2014}+x\_{2}^{2014}+…+x\_{2015}^{2014}=1$ та $x\_{1}^{2015}+x\_{2}^{2015}+…+x\_{2015}^{2015}=-1$.

Чому може дорівнювати значення виразу $x\_{1}+x\_{2}^{2}+x\_{3}^{3}…+x\_{2015}^{2015}$?

# Олімпіада. 8 клас.

17.10.2015

1. У трикутнику $ABC$ проведено висоти $AD$ і $BE$, $∠ACB=120^{o}$. Нехай $F$ - середина сторони $AB$. Знайдіть найбільший кут трикутника $DEF$.

2. Довести, що для натуральних чисел $a, m$ $(a>1)$ виконується:

НСД $\left(\frac{a^{m}-1}{a-1}, a-1\right)=$ НСД $\left(a-1,m\right)$.

3. Скільки існує таких натуральних $n\leq 1000$, що $n^{3}-n\vdots 96$?

4. На дошці в рядок записано 10 чисел. Відомо, що кожне число більше від попереднього і ділиться на одне з попередніх. Крім того, перше число більше від 1, а сума всіх чисел становить 275. Які числа записано на дошці? Відповідь обґрунтуйте.

5. Знайти кількість таких п'ятицифрових натуральних $n$, що $n\vdots 37$ і закінчується на 37.

# Олімпіада. 8 клас.

23.10.2015

**1.** Таблицю 5х5 заповнили натуральними числами 1,2,…,25 таким чином, що кожне число трапляється рівно один раз і кожні два послідовні числа містяться у сусідніх (таких, що мають спільну сторону) клітинках. Яка максимальну кількість простих чисел могла опинитися в одному стовпці таблиці? Разом із відповіддю слід навести приклад заповнення таблиці, для якого найбільше значення досягається.

**Рис. 1**

**2.** Лампи розташовані у вигляді квадрату , як це показане на рис. 1. Лампи можуть бути у стані «горить» чи «не горить». Є 9 перемикачів, які відповідають кожній лампі. При цьому при натисканні відповідного перемикача змінюють свій стан на протилежний («горить» на «не горить» та навпаки) усі лампи, що розташовані в одному рядку та одному стовпчику з відповідною лампою. На початку усі лампи «не горять». Яку найменшу кількість натискань перемикачів треба зробити, щоб усі лампи стали у стані «горить»?

**3.** У рівнобедреному трикутнику  провели бісектрису , а у трикутнику  – бісектрису . Знайдіть величини кутів трикутника , якщо відомо, що бісектриси кутів  та  перетинаються на прямій .

**4.** Нехай  – натуральні числа. На яке найбільше натуральне число обов’язково ділиться націло вираз ?

**5.** Знайдіть найбільше натуральне число n, таке що 2015! ділиться націло на 23n.