**ВСЕУКРАЇНСЬКА ОЛІМПІАДА З МАТЕМАТИКИ**, III етап

*26 січня – 27 січня 2013 року, м.Львів*

**7 клас**

**1.** У хлопчика є два різних пісочних годинника на 7 хвилин і 11 хвилин. Йому потрібно зварити на сніданок куряче яйце, яке вариться 10 хвилин. Як відміряти цей проміжок часу за допомогою пісочних годинників?

**2.** Скільки нескоротних дробів $a = \dfrac{2011}{n}$, де $n$ — натуральне число, задовольняють умову

$$\frac{1}{2013} < \frac{2011}{n} < \frac{1}{2012}?$$

Відповідь обгрунтувати.

**3.** Перевірте, чи число

$$\frac{10^{2013}+62}{18}$$

є натуральним числом. Відповідь обгрунтувати.

**4.** Цифри $x, y, z$ такі, що для чотирицифрових чисел виконується рівність

$$\overline{xxyy} - \overline{yyzz} + \overline{xyzx} - \overline{yxxz} = 2 \cdot \overline{x0zz} - 2 \cdot \overline{y000},$$

де запис $\overline{abcd}$ означає чотирицифрове число з цифрами $a, b, c, d$, наприклад, $\overline{2345} = 2345$. Знайти всі такі значення $x, y, z$.

**5.** Велосипедист у вітряну погоду їде спочатку проти вітру з пункту A в пункт B, а потім за вітром повертається назад. Відомо, що при русі за вітром швидкість велосипедиста зростає на 50 $^\circ/_\circ$, а проти вітру — зменшується на 25 $^\circ/_\circ$ у порівнянні з його швидкістю у безвітряну погоду. Чи виявиться час такої поїздки велосипедиста менший за час, який би він витратив на таку ж подорож у безвітряну погоду? Відповідь обгрунтувати.

**ВСЕУКРАЇНСЬКА ОЛІМПІАДА З МАТЕМАТИКИ**, III етап

*26 січня – 27 січня 2013 року, м.Львів*

**8 клас**

**1.** Розв'язати рівняння

$$x^3 + 5x^2 + 3x = 9.$$

**2.** Чи існує трикутник, довжини сторін якого дорівнюють $a = \sqrt{2012}, b = \sqrt{2013}, c = 0,012$? Відповідь обгрунтувати.

**3.** Знайти всі цілі значення $x$, для яких $|(2x-1)(2x-2013)|$ — просте число. Відповідь обгрунтувати.

**4.** Знайти найбільше значення параметра $a$, для якого всі дійсні значення $x$ задовольняють нерівність

$$-2013 \cdot |x-a| + a \cdot |a-x| < 1.$$

Відповідь обгрунтувати.

**5.** Чи існує опуклий п'ятикутник, довжина однієї зі сторін якого дорівнює 1, а довжини всіх його діагоналей виражаються натуральними числами? Відповідь обгрунтувати.

**ВСЕУКРАЇНСЬКА ОЛІМПІАДА З МАТЕМАТИКИ**, III етап

*26 січня – 27 січня 2013 року, м.Львів*

**9 клас**

**1.** Розв'язати рівняння

$$x^3 + 7x^2 + 8x = 16.$$

**2.** Нехай $a$, $b$ — катети прямокутного трикутника, а $c$ — його гіпотенуза. Довести, що

$$a^3 + b^3 < c^3.$$

**3.** Для яких натуральних значень $n$ число $\dfrac{10^{n+1} + 44}{36}$ натуральне. Відповідь обгрунтувати.

**4.** Визначити всі значення параметра $a$, при яких рівняння

$$|2x - 1| + (2a + 1)\sqrt{x} - a - 1 = 0$$

має непорожню множину розв'язків. Відповідь обгрунтувати.

**5.** Середньою лінією чотирикутника називається відрізок, що сполучає середини протилежних сторін. Довести, що для того щоб діагоналі чотирикутника були взаємно перпендикулярними необхідно і досить, щоб довжини середніх ліній чотирикутника дорівнювали одна одній.

**ВСЕУКРАЇНСЬКА ОЛІМПІАДА З МАТЕМАТИКИ**, III етап

*26 січня – 27 січня 2013 року, м.Львів*

**10 клас**

**1.** Розв'язати нерівність

$$x^2 - 2013 \cdot x - 2012 - \frac{2013}{x} + \frac{1}{x^2} < 0.$$

**2.** Яке число більше $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 2012 \cdot 2013$ чи $1007^{2013}$ ? Відповідь обгрунтувати.

**3.** У трапецію вписано коло, точка дотику якого до однієї з бічних сторін ділить її на відрізки довжиною $n$ і $m$, $n \neq m$. Обчислити довжини основ трапеції, якщо її периметр $P = 4(n+m)$.

**4.** Розв'язати рівняння

$$\frac{x^2 - 1 + |x+1|}{|x|(x-2)} = 2.$$

**5.** Знайти всі пари чисел $(x, y)$ таких, що

$$\begin{cases} x + y + \sqrt{x^2 - y^2} = 12, \\ y\sqrt{x^2 - y^2} = 12. \end{cases}$$

**ВСЕУКРАЇНСЬКА ОЛІМПІАДА З МАТЕМАТИКИ**, III етап

*26 січня – 27 січня 2013 року, м.Львів*

**11 клас**

**1.** Розв'язати рівняння

$$2x\sqrt{3-x} = x^2 + 3.$$

**2.** Нехай $a$, $b$ — катети прямокутного трикутника, а $c$ — його гіпотенуза. Довести, що

$$\frac{c^3}{\sqrt{2}} \le a^3 + b^3 < c^3.$$

**3.** Нехай $a_n \ge 0$ для всіх $1 \le n \le 2013$ і

$$a_1 + a_2\sqrt{a_2} + a_3\sqrt[3]{a_3} + a_4\sqrt[4]{a_4} + \ldots + a_{2013}\sqrt[2013]{a_{2013}} \le 1.$$

Довести, що $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{2013} < 3$.

**4.** Довести, що нерівність

$$\frac{x}{\sqrt{2y^2+3}} + \frac{y}{\sqrt{2x^2+3}} \le \sqrt{\frac{2012}{2013}}$$

виконується для всіх $x, y \in [0, 1]$.

**5.** Чи існує опуклий шестикутника, одна зі сторін якого має довжину 1, а довжини всіх його діагоналей — натуральні числа? Відповідь обгрунтувати.

**6.** В залежності від параметра $a$ розв'язати рівняння

$$\sin(\frac{5}{3}\cos(\pi x)) + \cos(\frac{5}{3}\cos(\pi x)) = a.$$