Відкрита олімпіада з математики. Розв'язки

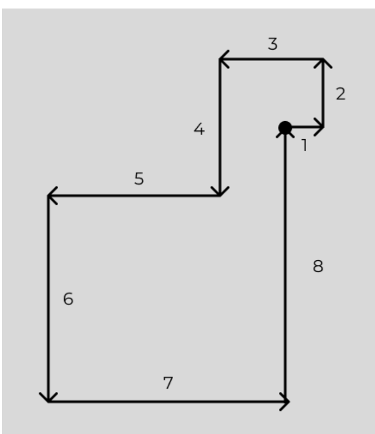
1 5 клас.

5.1 Азартний Микола дуже любить грати в лотерею, і цього тижня там акція - за кожний 7 використаний квиток дають ще один! Микола купив 49 квитків. Скільки разів він зможе зіграти в лотерею? Відповідь обгрунтуйте.

Відповідь: 57. Після того, як Микола використає 49 квитків, він отримає додатково ще $\frac{49}{7} = 7$. І після того, як він скористається ними, він отримає ще $\frac{7}{7} = 1$ квиток. Отже, він використає $49 + 7 + 1 = 57$ квитків.

5.2 Мурашка, що рухається по площині, виповзла з точки O, проповзла відрізок довжиною 1 см і повернула на кут $90°$. Далі вона проповзла відрізок довжиною 2 см і повернула на кут $90°$. Далі, вона проповзла відрізок довжиною 3 см і повернула на кут $90°$ і т.д. (тобто кожного разу збільшуючи попередню пройдену відстань на 1 см). Чи зможе мурашка повернутися в точку O за певну кількість рухів, підібравши відповідні напрямки поворотів? Якщо це можливо, то наведіть приклад, а якщо ні, то доведіть чому це неможливо.

Відповідь: Так, це можливо. Наприклад, за 8 рухів наступним чином:



5.3 Чи можливо розмістити числа від 1 до 9 (кожне число має бути рівно один раз) у квадраті 3 на 3 таким чином, щоб добутки чисел на обох головних діагоналях були непарними, а серед шести рядків та колонок не більше трьох мали парну суму чисел? Якщо це можливо, то наведіть приклад, а якщо ні, то доведіть чому це неможливо.

Відповідь:Ні, це неможливо. Оскільки добутки чисел на головних діагоналях мають бути непарними, то всі числа розташовані на головних діагоналях мають бути непарними (якщо бодай одне парне, то добуток буде парним). Оскільки комірок на головних дігоналях 5 і непарних чисел у проміжку від 1 до 9 теж рівно 5, то це означає, що на інших чотирьох позиціях, що залишились будуть парні числа. Розглянемо наступне розташування:

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Від будь-якого іншого, що задовільняє умови задачі, можна перейти до цього, не порушуючи парності сум у рядках та колонках (а, отже, достатньо розглянути саме цей випадок). Лише один рядок та одна колонка мають непарну суми, усі ж інші - парні (а їх чотири), що і завершує доведення.

5.4 Жовті хамелеони завжди говорять правду, а сині брешуть, після чого стають жовтими. У компанії з 2023 хамелеонів кожен по черзі відповів на питання, скільки жовтих хамелеонів зараз серед них. Відповідями були числа 1, 2, ..., 2023 (саме в такому порядку!). Скільки початково могло бути жовтих хамелеонів? Знайдіть усі можливі відповіді та обгрунтуйте їх.

Відповідь: 0 або 1.

Приклад: Для 0 жовтих хамелеонів - спочатку всі хамелеони сині, після кожної k-ої відповіді у нас буде k жовтих хамелеонів та на $k+1$ відповіді синій хамелеон збреше, що жовтих хамелеонів є k та сам стане жовтим. Для 1 жовтого хамелеона - спочатку він скаже правду (про те, що всього є 1 жовтий хамелеон) та далі сині хамелеони аналогічно будуть брехати.

Розв'язок: Припустимо, що в нас є хоча б 2 жовтих хамелеони. Розглянемо відповіді двох сусідніх (серед жовтих) хамелеонів. Нехай перший з них дав відповідь на питання на k-ому ході, а другий - на m-ому. Таким чином, ми знаємо, що після k-го ходу жовтих хамелеонів було рівно k. Після цього, можливо, в нас давали відповідь декілька синіх хамелеонів (аж до $m-1$ ходу), і кожна їхня відповідь збільшує кількість жовтих хамелеонів на 1; відповідно, на m-ому ході ми будемо мати $m-1$ жовтого хамелеона та жовтий хамелеон не зможе сказати, що зараз є m жовтих хамелеонів - суперечність!

5.5 Данило та Женя грають в "Дивні Шашки"на смужці розміром 1x2023. Спочатку, їхні фішки стоять у крайніх клітинках та вони ходять по черзі, першим ходить Данило. Кожного ходу вони можуть пересувати свою фішку на одну або дві клітинки вперед(від їхнього краю). Ставити фішку на клітинку, на якій вже інша фішка, заборонено. Виграє той, хто зіб'є фішку свого опонента (збиттям ми називаємо хід на дві клітинки, під час якого ми перестрибуємо іншу фішку). У кого є стратегія гри, що не порушує правил, та яка гарантує перемогу незалежно від ходів іншого гравця?

Відповідь: Виграє Данило. Спочатку він посуне свою фішку на одну клітинку вперед. Після цього, на кожен хід Жені від буде відповідати протилежним: якщо Женя походила на одну клітинку вперед, то він походить на дві, і навпаки. Таким чином, після кожного ходу Данила відстань між фішками обох гравців зменшується на 3. Після першого ходу ця відстань була 2022 (включно з фішками гравців). Оскільки 2022 кратне 3, настане момент, коли відстань між фішками буде рівно 3 (і це буде після ходу Данила). Женя не зможе походити на дві клітинки вперед - там зайнято, тому вона буде змушена посунути свою фішку на одну клітинку вперед, після чого Данило її поб'є.

6.1 Задача **5.3**

6.2 Знайдіть 2023 необов'язково різних натуральних числа, сума яких дорівнює їхньому добутку. Достатньо навести приклад.

Приклад: Такими, наприклад, є числа $\{1, 1, \dots, 1, 2, 2023\}$, де кількість одиничок - 2021. Дійсно, $1+1+\ldots+1+2+2023 = 2021+2+2023 = 2 * 2023$

6.3 Задача **5.5**

6.4 Мурашка виповзла з точки O, проповзла відрізок довжиною 1 і повернула на кут $90°$. Далі вона проповзла відрізок довжиною 2 і повернула на кут $90°$. Далі, вона проповзла відрізок довжиною 3 і повернула на кут $90°$ і т.д. Чи зможе мурашка повернутись в точку O, якщо завжди повертатиме праворуч? Якщо це можливо, то наведіть приклад, а якщо ні, то доведіть чому це неможливо.

Відповідь: Мурашка не зможе повернутись в початкову точку. Нехай спочатку мурашка рухається вздовж осі Ох. Тоді помітимо, що всі непарні ходи вона буде робити вздовж осі Ох, а всі парні - вздовж Оу, причому напрямок руху по осях змінюється кожного ходу. Доведемо, що мурашка не зможе повернутись в точку О по осі Ох (будемо розглядати тільки цю вісь). Нехай мурашка зробила k ходів по цій осі довжиною $x_1, x_2, ..., x_k$ (при чому $x_1 = 1, x_2 = 3, x_3 = 5, ..., x_k = 2k-1$). Тоді ходи $x_1, x_3, x_5, ...$ вона зробила направо, а ходи $x_2, x_4, x_6, ...$ наліво вздовж осі Ох. Якщо вона зробила однакову кількість ходів направо і наліво, тоді вона буде лівіше від О(бо $x_2 > x_1, x_4 > x_3, x_6 > x_5..., x_k > x_{k-1}; k$ - парне), інакше вона зробила на один хід праворуч більше (бо напрямок ходів чергується) і тоді вона буде правіше від центру (бо $x_3 > x_2, x_5 > x_4, ..., x_k > x_{k-1}; k$ - непарне). Таким чином, вона ніколи не потрапить в точку О.

6.5 Клітинки квадрата розміром 100x100 пофарбовані в білий та чорний кольори в шаховому порядку. Квадрат розділили по лініях сітки на квадрати з непарними сторонами і в кожному квадраті відмітили центральну клітинку. Доведіть, що білих і чорних клітинок відмічено порівну.

Доведення: Помітимо, що в квадраті з парною стороною однакова кількість чорних та білих клітинок, а в квадраті з непарною стороною - кількість клітинок з кольором, як у центральної, на один більша. Через те, що в початковому квадраті (зі стороною 100) кількість чорних та білих клітинок однакова, вона має бути однаковою і для всіх маленьких квадратів. Нехай в нас x квадратів з центральною чорною клітинкою та y квадратів з центральною білою. Позначимо через k кількість усіх чорних клітинок у квадратах, у яких центральна клітинка чорна, тоді в цих квадратах $k-x$ білих клітинок(бо у кожному квадраті на одну білу клітинку менше). Аналогічно, якщо l - кількість усіх білих клітинок у квадратах, у яких центральна клітинка біла, тоді в цих квадратах $l-y$ чорних клітинок. Тоді ми маємо сумарно $k+l-y$ чорних клітинок та $l+k-x$ білих клітинок, звідки випливає, що $x = y$.

7.1 Задача **5.5**

7.2 Розв'яжіть рівняння: $y + y^{2023} = 2y^{2024}$.

Відповідь: $y \in \{0, 1\}$. Зрозуміло, що $y = 0, 1$ є розв'язком. Тепер вважаємо, що $y \neq 0$ та скорочуємо на y і отримуємо наступне рівняння:

$$1 + y^{2022} = 2y^{2023}$$

Розглянемо наступні випадки:

Якщо $y \leq 0$, тоді права частина рівняння ≤ 0, а ліва ≥ 1, тому рівність неможлива.

Якщо $0 < y < 1$, тоді $y^{2023} < y^{2022} < 1$, тому права частина менша за ліву та рівність неможлива.

Якщо $y > 1$, тоді $y^{2023} > y^{2022} > 1$, тому права частина більша за ліву та рівність неможлива.

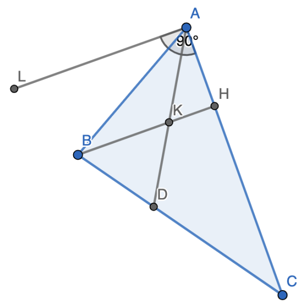
7.3 У соціальній мережі "ФізМат"зареєстровано 2023 людини. Допитлива Таня хоче дізнатись максимально можливу кількість пар друзів у цій мережі. Вона знає, що Оксана Богданівна - єдина з учасниць мережі, яка дружить з усіма іншими учасниками. Допоможіть Тані розв'язати цю задачу (врахуйте кожну пару рівно по одному разу при підрахунку!). Відповідь обгрунтуйте.

Відповідь: $2022 * 1011 = 2044242$. Оскільки ми знаємо, що Оксана Богданівна єдина, хто дружить з усіма, усі інші учасники (їх усього 2022) є не-друзями бодай з одним іншим учасником мережі. Оскільки допитлива Таня хоче максимізувати кількість пар друзів це означає, що насправді, допитлива Таня має мінімізувати кількість пар не-друзів. Скористаємось жадібним підходом та сформуємо 1011 пар з 2022 учасників, які якраз не дружитимуть між собою. Припустимо, що це не є мінімальна кількість пар не-друзів, тоді достатньо 1010. У такому разі максимум $2 * 1010 = 2020$ різних учасників мережі будуть з кимось не дружити, однак це суперечить умові, що тільки одна людина дружить з усіма (а не три). Загальна кількість всіх можливих пар друзів серед 2023 людей це $\frac{2023*2022}{2} = 2023 * 1011$. А отже кінцева відповідь досягається тим, що від отриманого числа потрібно відняти мінімальну кількість пар не-друзів: $2023 * 1011 - 1011 = 2022 * 1011 = 2044242$.

7.4 У трикутнику ABC, висота BH перетинається з бісектрисою AD у точці K. Точка L -

симетрична точці D відносно сторони AB (тобто точки D та L лежать по різні сторони прямої AB на однаковій відстані від AB і LD перпендикулярне до AB). Виявилось, що пряма AL паралельна до висоти BH. Доведіть, що $AK = BK$.

Доведення: Зауважимо, що оскільки AL паралельна до BH, то $\angle LAB = \angle ABH$ як внутрішні різносторонні при паралельних прямих. За вказаною умови симетричності (де X - точка перетину LD та AB), ми маємо, що $LX = XD$, а отже трикутник XLA та XDA рівні між собою за двома сторонами та кутом між ними (AX - спільна, $LX = DX$, $\angle LXA = \angle DXA = 90°$), а отже з рівностей трикутників ми отримуємо рівність кутів $\angle KAB = \angle ABK$. Отже, трикутник ABK - рівнобедрений, звідки $AK = BK$.



7.5 На палиці довжиною 2022 см сидить 2023 мурахи, відстань між сусідніми мурахами 1 см. Вони рухаються зі швидкістю 1 см/с. Коли дві мурахи зустрічаються - вони відбиваються одна від одної (змінюють свій напрямок на протилежний). Коли мураха виходить за край палиці - вона з неї падає. Спочатку напрямки руху кожної з мурах невідомі. Знайдіть найменший та найбільший час, через який на палиці не буде жодної мурахи.

Відповідь: найменший час - $\frac{2022}{2} = 1011$, найбільший час - 2022.

Приклад: Для найменшого часу всі мурахи рухаються від центру, для найбільшого - всі мурахи рухаються до центру (центральна мураха рухається в довільну сторону).

Розв'язок: Спочатку зауважимо, що через те, що всі мурахи рухаються з однією швидкістю, немає різниці, чи мурахи відбились одна від одної при зустрічі, чи вони "пройшли"одна через одну (ніби їхня зустріч і не відбулась), тому ми можемо вважати, що мурахи не зустрічаються між собою. Після цього спрощення задачі, зрозуміло, що найбільший можливий час - це час, за який одна з крайніх мурах пробіжить всю палицю (це максимально можлива відстань для однієї з мурах); найменший можливий час - це час, за який центральна мураха подолає шлях до одного з країв (вона у будь-якому випадку має дійти до одного краю).