**Львівський фізико-математичний ліцей**

**при ЛНУ ім. І. Франка**

**Відкрита олімпіада з математики**

**для учнів 4–6 класів**

**«Математична вишиванка»**

*"Молодість дається один раз в житті.*

*Надалі для пустощів треба шукати інше виправдання."*

***Умови та розв’язання завдань***

4 клас

**1.** У селі, де живе вчителька Оленка, пошту приносять тільки по вівторках. Кожного вівторка вона отримує рівно одну листівку з вітаннями від своїх учнів протягом усього  року. Але інколи їй пишуть і батьки учнів, чиї листівки так само доставляють вчительці у вівторок. Відомо, що включно до неділі 15 грудня 2019 року вона отримала  листівок. Скільки разів Оленці впродовж 2019 року написали батьки?

***Відповідь:*** .

***Розв’язання.*** Порахуємо кількість вівторків у 2019 році до 10 грудня включно. Усього в 2019 році є  з остачею . Тобто цей рік з вівторка починався та вівторком завершується. Таким чином в цьому році  вівторка. Але 17, 24 та 31 грудня ще не настали. Тому усього було рівно  вівторків у 2019 році, коли Оленка отримувала листівки. З них рівно  від учнів, тому  було від батьків.

**2.** Серед натуральних чисел  усі числа є різними та найбільшим серед них є число . Які значення може приймати число , якщо відомо, що  та ? Вкажіть усі можливі відповіді.

***Відповідь:***  або .

***Розв’язання.*** Якщо , то така ситуація можлива при ,  та .

Якщо , то така ситуація можлива при ,  та .

Якщо , то така ситуація неможлива, бо якщо , то . Аналогічно й для числа . Але вони мають бути різними, тому принаймні одне з них, наприклад, . Тому їхня сума не може бути рівною . Аналогічно й для менших значень  це неможливо, бо принаймні одне з чисел  чи  буде не менше .

**Рис. 1**

**3.** *Пентаміно* – це зв’язні фігурки, що складаються з 5 однакових квадратиків , які з’єднані між собою по сторонах (клітинки не можуть бути з’єднані через вершинку чи частину сторони). Так на рис. 1 ліворуч зображена фігурка, що є пентаміно, а праворуч – не є пентаміно. Скільки можна вирізати з квадратів розміром  клітинки різних фігурок пентаміно (тобто таких, які не можна накласти одна на одну навіть при поворотах та перевертаннях), які мають периметр ?

***Відповідь:*** .

***Розв’язання.*** Усього різних фігурок пентаміно  (це усі можливі з'єднані по стороні фігурки з  клітинок), в чому можна переконатися простим перебором. З них залишається вибрати ті, що мають периметр  та зможуть поміститися в квадрат  (рис. 2).

**Рис. 2**

**4.** На дошці записані числа , , , , , , ,  та . Петрик та Василь вибирають собі по  різних числа із наявних на дошці таким чином, що сума чисел Петрика у  рази менша від суми чисел Василя. Яке число лишилося не вибраним?

***Відповідь:*** .

***Розв’язання.*** Позначимо суму чисел, що обрав Петрик через , тоді Василь набрав суму , таким чином разом сума їхніх чисел дорівнює , тобто кратна . Сума усіх записаних чисел дорівнює . Таким чином прибрати можна лише число, після якого буде сума, що кратна , а це лише число . Покажемо, що числа можна було обрати належним чином: числа Василя мають давати суму , наприклад, . Тоді сума чисел Петрика дорівнює , що й треба було показати.

5 клас

**1.** Дату **"**2 лютого 2020" року можна записати як . Для її запису використовуються тільки дві цифри –  та . Скільки усього існує дат у третьому тисячоріччі, тобто від 1 січня 2001 року до 31 грудня 3000 року, які можна записати лише за допомогою цифр  та ?

***Відповідь:*** .

***Розв’язання.*** Серед останніх -х цифр перша обов'язково . З наступних трьох можна вибрати будь-яку з восьми комбінацій, окрім . Тобто усього  варіантів. Для цифр, що показують місяць є єдиний варіант . А для цифр, що показують день, таких варіантів  – ,  та . Загалом маємо  варіант.

**2.** Петрик нарисував  прямих, жодні  з яких не перетинаються в одній точці. При цьому він отримав по одній цукерці за кожну точку перетину та за кожний набір паралельних прямих (їх може бути більше ніж дві в наборі). Наприклад, за варіант на рис. 3 Петрик отримає  цукерок за точки перетину та ще  за групу з трьох паралельних прямих – загалом . Скільки цукерок може отримати Петрик при різних варіантах рисунків? Наведіть усі можливі варіанти.

**Рис. 3**

***Відповідь:*** .

***Розв’язання.*** розглянемо випадки за кількістю паралельних прямих.

Випадок 1. Усі  прямих паралельні. Тоді Петрик отримає  цукерку, оскільки точок перетину немає.

Випадок 2. Є  паралельні прямі. Тоді п'ята пряма перетинає кожну з цих чотирьох, тому Петрик отримає  цукерку за паралельні прямі та ще  за точки перетину. Разом – .

Випадок 3. Є  паралельні прямі.

Тут маємо 2 варіанти.

Варіант а). інші дві прямі так само паралельні. Тоді маємо  точок перетину та  групи паралельних прямих, які дають Петрику  цукерок.

Варіант б). інші дві прямі не паралельні. Цей варіант якраз зображений на рис. 1 і дає Петрику  цукерок.

Випадок 4. Є не більше  паралельних прямих.

Тут знову маємо 2 варіанти.

Варіант а). є інші дві прямі, які так само паралельні. Тоді маємо  точок перетину та  групи паралельних прямих, які дають Петрику  цукерок.

Варіант б). інші три прямі не паралельні. Тоді маємо  точок перетину та  група паралельних прямих, що дає Петрику  цукерок.

**Рис. 4**









































Випадок 5. Усі  прямих не паралельні, тобто попарно перетинаються. Тоді Петрик отримає  цукерок за кількістю точок перетину.

**3.** Задача № 4 для 4 класу.

**4.** Чи можна деякий квадрат  розрізати на  прямокутників по лініях сітки так, щоб усі сторони утворених прямокутників були десятьма різними натуральними числами?

***Відповідь:*** рис. 4.

***Розв’язання.*** Розв'язків є багато, достатньо нарисувати квадрат достатньо великого розміру, розташувати прямокутники як на рис. 1, а далі просто підібрати потрібні цілі числа.

**5.** У п'ять горщиків, що стоять в ряд, Кролик налив рівно  кг меду – не обов'язково в кожний і не обов'язково порівну. Вінні-Пух може один раз вибрати будь-які  горщика, що стоять поруч. Яку найбільшу кількість меду гарантовано може отримати Вінні-Пух?

***Відповідь:***  кг.

***Розв’язання.*** Якщо Кролик розкладе мед так, що в -му, -му та -му горщиках буде по  кг меду, то Вінні не зможе взяти більше  кг.

Покажемо тепер, що він завжди зможе взяти не менше  кг. Якщо в парі крайніх зліва та в парі крайніх справа є принаймні  кг меду, то він вибирає потрібну пару і отримує принаймні  кг меду. Якщо в кожній з цих пар менше 1 кг меду, то в середньому горщику меду більше  кг, Вінні бере його і так само задовольняє умову.

6 клас

**1.** Про ненульові цифри , які не обов'язково різні, відомо, що числа  та  – непарні, а числа  та  – точні квадрати. Яке найменше значення може приймати число ?

***Відповідь:*** .

***Розв’язання.*** Випишемо усі двоцифрові квадрати: , , , ,  та . Тоді пару квадратів  та  можуть скласти такі числа:  та ,  та ,  та ,  та . Перевіримо, які з них призводять до вірної відповіді. Тут цифри  та  мають бути непарними. Тут умову задовольняє лише одна пара –  та . Таким чином ,  та . Тоді  може бути будь-яким непарним числом. Щоб число  було найменшим, має бути .

**2.** Задача № 4 для 4 класу.

**3.** Задача № 4 для 5 класу.

**4.** Задача № 5 для 5 класу.

**5.** Потрібно  іграшок вагою  г та  іграшок вагою  г розкласти по шухлядах місткістю  кг кожна (не обов'язково заповнювати шухляду повністю). Яка найменша кількість шухлядок знадобиться для цього?

***Відповідь:*** .

***Розв’язання.*** Замінимо кожну важку іграшку на  легких. Якщо ми зможемо розкласти початковий набір по певній кількості шухлядок, то й новий набір – так само. Оскільки , то в одну шухляду ми зможемо покласти максимум  іграшок. У перерахунку в нас  легких іграшок, тому з нерівності . Звідси випливає, що шухлядок треба не менше, ніж . З іншого боку такої кількості шухлядок вистачить, якщо іграшки розкласти таким чином: у  шухлядок – по  великі та  маленьких, а у  шухлядок – по  маленьких іграшок, і в останню –  маленькі іграшки.