Відкрита олімпіада з математики для учнів 4–7 класів

"Береженого Бог береже, а козака шабля"

Розв’язання завдань

4 клас

1. Яна вирізала з паперу один прямокутник розміром 10×24, а також два однакові квадрати та ще один прямокутник, що не є квадратом. В результаті з цих чотирьох фігур вона склала квадрат, без накладань та дірок. Які розміри може мати другий прямокутник? Дайте, принаймні, чотири відповіді.

Відповідь: 34×44, 58×34, 19×29 та 2×24
Розв’язання. На рис. 3 наведені можливі розв'язання.

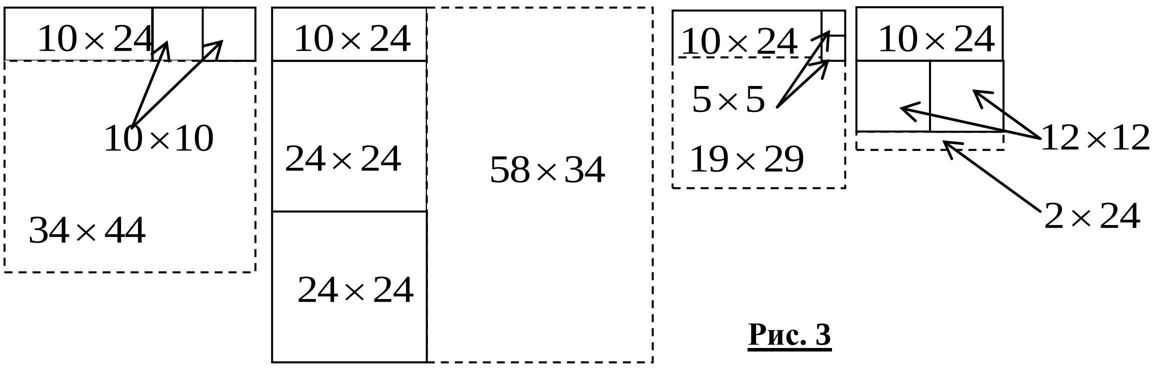

Рис. 3

2. У таблиці 2×9 верхній рядок зліва направо заповнений цифрами $1, 2, \dots, 9$ у вказаному порядку. Чи можна другий рядок цієї таблиці заповнити тими самими числами у деякому іншому порядку, щоб сума двох чисел у кожному стовпчику утворювала точний квадрат?

Відповідь: так.
Розв’язання. Головною ідеєю побудови є така – якщо до цифри a у верхньому рядку приписали цифру b, то до цифри b слід приписати цифру a. Далі простим перебором отримуємо розподіл, як на рис. 4.

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
8	**2**	**6**	**5**	**4**	**3**	**9**	**1**	**7**

Рис. 4

3. Коробка, яка має форму куба з ребром 4 см повністю заповнена набором кубиків зі стороною 1 см. Вкажіть усі інші можливі розміри коробок, що мають форму прямокутного паралелепіпеда з квадратним дном і які можна повністю заповнити тим самим набором кубиків зі стороною 1 см.

Відповідь: $1\times1\times64$, $2\times2\times16$ та $8\times8\times1$.

Розв’язання. Малих кубиків усього $4^3=64$. Квадратне дно може бути таким, щоб його площа ділила 64. Таким чином можливі варіанти 1, 4, 16 та 64. Третій варіант відповідає заданій коробці. Інші варіанти дають такі відповіді: $1\times1\times64$, $2\times2\times16$ та $8\times8\times1$.

4. Тарасик та Стецько знайшли скриню зі скарбами. Кожний з них напхав у одну кишеню срібних монет, а у іншу – золотих. Тарасик мав у одній кишені дірку, через яку загубив половину своїх золотих монет. Стецько теж мав в одній своїй кишені дірку і втратив половину срібних монет. Вдома Стецько віддав третину своїх золотих монет Тарасикові, а Тарасик віддав чверть своїх срібних монет Стецькові. Після цього кожний з них мав 12 золотих та 18 срібних монет. Скільки і яких монет Тарасик та Стецько забрали зі скрині з самого початку?

Відповідь: Тарасик забрав зі скрині 12 золотих та 24 срібних, а Стецько – 18 золотих та 24 срібних.
Розв'язання. Нехай Тарасик мав з самого початку x золотих монет, а Стецько – y. Тоді можна скласти такі рівняння: $12 = \frac{2}{3}y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y$. Звідси $y = 18,\ x = 12$.
Аналогічно для срібних монет: Тарасик мав з самого початку a срібних монет, а Стецько – b. $18 = \frac{3}{4}a = \frac{1}{4}a + \frac{1}{2}b \Rightarrow a = 24,\ b = 24$.

5. У класі пройшов шаховий турнір в одне коло між усіма бажаючими, тобто кожний з кожним зіграв рівно по 1 разу. За перемогу гравець отримує 1 очко, за нічию – $\frac{1}{2}$ очка, за поразку очки не нараховуються. Відомо, що серед будь-яких трьох учасників є той, хто набрав в іграх з іншими двома рівно $\frac{3}{2}$очки. Яка найбільша кількість учасників могла брати участь в турнірі?

Відповідь: 5 учасників.
Розв'язання. Приклад, що для 5 учасників турнір з такими умовами можливий, такий: нехай $A > B > C > D > E > A$ – знак більше означає перемогу. А інші партії завершилися нічиєю. Умови очевидно виконуються,адже з будь-яких трьох учасників принаймні два йдуть поспіль, та принаймні два – не поспіль.
Припустимо, що учасників принаймні 6. Очевидно, що для кожних трьох учасників мають справджуватися такі умови:

(1) не може бути трьох гравців, усі партії між якими завершилися внічию.

(2) не може бути трьох гравців, усі партії між якими завершилися без нічиїх.

Кожний учасник, наприклад, A, зіграв 5 партій. Якщо серед них було принаймні 3 нічиї, наприклад, проти B, C, D,тоді в зустрічах між ними не повинно бути нічиїх, щоб не суперечити умові (1) з гравцем A, але тоді маємо суперечність з умовою (2) між ними. Аналогічно, якщо там три гри без нічиїх. Одержана суперечність завершує доведення.

<u>5 клас</u>

1.Задача № 2 за 4 клас.

2.Задача № 4 за 4 клас.

3. В рядок зліва направо стояли 10 дітей, у кожного з яких була певна кількість горіхів. При цьому у дівчат та хлопчиків сумарна кількість горіхів була однакова. За командою вчителя кожна дитина віддала по 1 горіху кожній дитині, що стоїть правіше від неї (не обов'язково поруч). По завершенню цієї передачі виявилося, що у дівчат стало на 25 горіхів більше, ніж було до того. Скільки в рядку могло стояти дівчат?

Відповідь: 5.
Розв'язання. Зрозуміло, що діти передають відповідно $9, 8, \ldots, 0$ горіхів, а отримують відповідно

$0, 1, \ldots, 9$. Тобто кількість горіхів у п'ятьох дітей збільшується на $9, 7, 5, 3, 1$, а у інших на такі саме кількості зменшується. Оскільки $9+7+5+3+1=25$, звідси маємо, що усі дівчата мали лише збільшувати кількість своїх горіхів. Таким чином їх було рівно 5.

4.Задача № 5 за 4 клас.

5. Петрик виклав на стіл 2019 сірників. Василь та Грицько вирішили зіграти в гру – Василь може за один хід взяти зі стола 16 або 25 сірників, Грицько може за один хід взяти зі стола 11 або 29 сірників. Ходи роблять по черзі, програє той, хто не може зробити хід, тобто на столі лишається менше сірників, ніж треба для ходу (або не лишилося жодного сірникапісля ходу супротивника). Петрик вийшов, а коли повернувся, то гра закінчилася, при цьому на столі лишилося 5 сірників. Хто переміг уційгрі і хто ходив першим?

Відповідь: переміг Василь, він ходив першим.
Розв'язання. Скористаємося подільністю на 9, на усі числа, що розглядатимемо, будемо дивитися як на остачу за модулем 9. На початку гри число сірників дорівнює 3. Якщо першим ходив Василь, то число стане рівним 5, тоді після ходу Грицька воно знову стане рівним 3. І далі все повторюється. Якщо порядок ходів інший, то спочатку ходить Грицько, і число сірників на столі стає рівним 1, далі після ходу Василя воно знову стане рівним 3.
Як бачимо з умов задачі, першим ходив Василь, лише після такого порядку ходів на столі може лишитися 5 сірників. Він і переміг, оскільки саме Грицько не може зробити наступний хід.

6 клас

1. Задача № 2 за 4 клас.

2. Задача № 4 за 4 клас.

3. Задача № 3 за 5 клас.

4. Равлик рухається на папері в клітинку так, як це показано на рис. 7, а саме по спіралі, не заходячи двічі на жодну клітинку і не пропускаючи жодної, при цьому усі ці клітинки нумеруються послідовно. В якому напрямі равлик буде рухатися від клітинки з номером 243 до клітинки з номером 244: нагору, донизу, ліворуч чи праворуч?

Відповідь: ліворуч.
Розв'язання. Треба з'ясувати закономірність руху равлика. Спочатку він рухається 1 крок праворуч, далі 1 крок нагору. Далі – 2 кроки ліворуч і 2 кроки донизу. Потім все повторюється – 3 кроки праворуч та 3 кроки нагору, 4 кроки ліворуч і 4 кроки донизу. Переконатися в цьому нескладно, якщо на попередньому кроці було k кроків у певному напрямі, то наступного разу в тому напрямі буде $k+2$ кроки. Таким чином треба порахувати кількість ходів до потрапляння в поле 243.

$$1+1+2+2+\ldots+15+15=$$

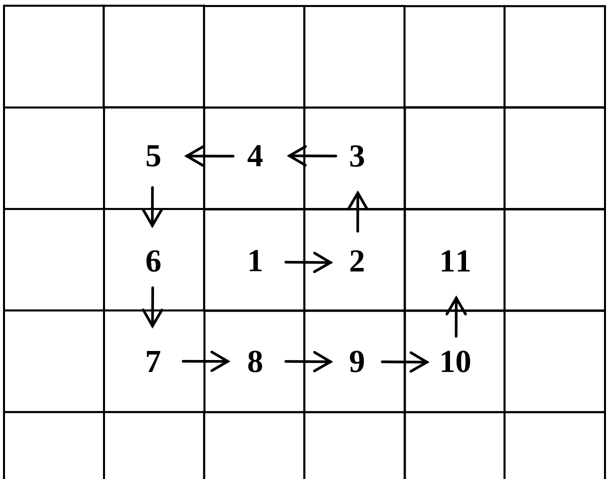

Рис. 7

$$= 2 \cdot (1 + 2 + \ldots + 15) = 240.$$

Останній хід на 15 був нагору. Дійсно, непарні довжини відповідають парам ходів $\to\uparrow$, а парні – $\leftarrow\downarrow$. Таким чином останні 15 кроків були нагору, тому наступні 16 ходів, які починаються з клітинки 241, будуть ліворуч.

5. Задача № 5 за 5 клас.

7 клас

1. Дано рівність $(x-7)(x^2-28x+\cdots)=(x-11)(x^2-24x+\cdots)$. Три крапки замініть такими числами, щоб рівність була правильна для будь-яких x. Випишіть всі можливі варіанти та обґрунтуйте їх.

Відповідь: 187, 119.
Розв'язання. За умовою рівність правильна для будь-яких x, отже для $x=7$ та $x=11$. Підставивши ці значення у обидві частини рівності, отримаємо значення, яких повинні набувати три крапки. $(x-7)(x^2-28x+187)=(x-11)(x^2-24x+119)$

2. Задача № 3 за 5 клас.

3. Задача № 4 за 6 клас.

4. Задача № 5 за 5 клас.

5. Число називається «псевдопростим», якщо воно представлене у вигляді суми деяких двох різних простих чисел. Яка найбільша кількість послідовних натуральних чисел таких, що кожне з яких більше 25 і кожне з них «псевдопростим»? Відповідь обґрунтуйте.

Відповідь: 5 чисел
Розв'язання. Припустимо, що існує хоча б 6 таких послідовних чисел. Тоді середних є три підряд непарних числа. Нехай ці числа $2n+1$, $2n+3$, $2n+5$, тоді $2n+5>25$. Кожне з них представляється у вигляді суми двох простих чисел різної парності, тобто у вигляді суми парного та непарного простих чисел. Але єдине просте парне число – це 2, отже, $2n+1=2+(2n-1)$, $2n+3=2+(2n+1)$, $2n+5=2+(2n+3)$, де числа - $2n-1$, $2n+1$, $2n+3$ – прості. Зауважимо, що ці три прості числа дають різні остачі при діленні на 3, отже, одне з них ділиться на 3 і є простим, а це означає, що воно дорівнює 3. Але, з іншого боку, кожне із цих чисел $2n-1$, $2n+1$, $2n+3$ більше за 23, тому жодне з них не може дорівнювати 3. Протиріччя.
Покажемо, що числа 30, 31, 32, 33, 34 задовольняють умову задачі. Дійсно, кожне з чисел більше за 25 і при цьому 30=11+19, 31=2+29, 32=13+19, 33=2+31, 34=11+23.