Типові завдання з математики для вступників у Львівський фізико –математичний ліцей при Львівському національному університеті імені І.Я.Франка

ВИРАЗИ

1 .Спростіть вирази:

$a)\left(\frac{3x+4}{4x^2-25}-\frac{1}{2x-5}\right)\cdot\frac{25+10x}{x-1}+\frac{2x}{5-2x};$

$b)\left(\frac{1}{5a+25}+\frac{1}{a^2-5a}-\frac{2}{25-a^2}\right)\cdot\frac{a-5}{a+5}-\frac{4}{5a};$

$c)\frac{2p^2}{p^2+2}+\frac{2p^4}{4-p^4}+2p^2\left(\frac{1}{p^2-2}-\frac{p^4+4}{2p^6+8p^2}\right).$

2. Обчисліть:

$a)(3^{11}\cdot 3^{19}-5\cdot 3^{18}\cdot 3^{10}+4\cdot 9^8\cdot 3^8):(41\cdot 3^{24}),$

$b)(12\cdot 5^{2n+1}-8\cdot 5^{2n}+4\cdot 5^{2n-1}):(4\cdot 5^{2n-2}),$

$c)\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+...+\frac{1}{98\cdot 99}+\frac{1}{99\cdot 100},$

$d)\frac{36}{3\cdot 7}+\frac{36}{7\cdot 11}+\frac{36}{11\cdot 15}+\frac{36}{15\cdot 19}+\frac{36}{19\cdot 23}+\frac{36}{23\cdot 27}+\frac{36}{27\cdot 31}+\frac{36}{31\cdot 35}.$

3. Знайдіть натуральні розв язки рівняння: а) $x^2+7y = y^2+7x$, б) $x^2-6xy+10y^2=169$.

4. Знайдіть значення х та у такі, що вираз $2x^2 +2y^2 + 2xy - 14x - 8y +33$ набуває найменшого значення.

5. Чому дорівнює значення виразу $a^{31}-74a^{30}+74a^{29}-...+74a^{17}-74a^{16}+73a^{15}+15,$ якщо а=73?

6. Які з чисел більші :

$a)\frac{11^{16}+1}{11^{17}+1}i\frac{11^7+1}{11^8+1};b)\frac{5^{2000}+1}{5^{2001}+1}i\frac{5^{2001}+1}{5^{2002}+1};c)\frac{22...21}{22...23}i\frac{33...31}{33...34};e)\frac{22...21}{33...32}i\frac{44...43}{66...65};f)3^{303}i2^{454}$?

7. Доведіть нерівність: $10x^2 + 10xy + 5y^2 +1>0$.

8. 9 олівців дорожчі, ніж 11зошитів. Що дорожче – 15 олівців чи 17 зошитів?

9. Обчисліть :

$a)\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}},$

$b)\frac{2^3-1}{2^3+1}\cdot\frac{3^3-1}{3^3+1}...\frac{2006^3-1}{2006^3+1}.$

10. Спростіть вираз :

$a)\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}, 1\le x\le 2,$

$b)\frac{\sqrt{7-4\sqrt{3}}}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{3}}.$

11. Розв’яжіть систему рівнянь: $\begin{cases} x+y+z+u=5,\\ y+z+u+v=1,\\ z+u+x+y=2,\\ u+v+x+y=0,\\ v+x+y+z=4.\end{cases}$

12. Скоротіть дроби: $a)\frac{x^4+a^2x^2+a^4}{x^3+a^3}, b)\frac{8a^{n+2}+a^{n-1}}{16a^{n+4}+4a^{n+2}+a^n}, c)\frac{a^4+4}{a^2+2a+2}.$

13. Додатні числа такі, що $\frac{a}{b+c}=\frac{b}{a+c}=\frac{c}{a+b}$. Довести, що $\frac{(a+b)^3}{c^3}+\frac{(b+c)^3}{a^3}+\frac{(c+a)^3}{b^3}=24.$

14. Порівняйте: $\sqrt{2006}-\sqrt{2005} ma \sqrt{2007}-\sqrt{2006}.$

15. Скоротіть дроби: $a)\frac{203203203}{405405405};b)\frac{342+127\cdot 341}{342\cdot 127+215};c)\frac{999999}{1002001}.$

Розв язки.

4. 8 при х=3, у=1. Запишемо даний вираз у вигляді $(x+y-4)^2 + (x-3)^2 +8$.

5. 15. Замінимо 74 на73+1 і підставимо у вираз.

8. 9а>11в, 6а>6в. Звідси 15а>17в.

9. Домножимо чисельник і знаменник на спряжений вираз.
11. Додамо всі рівняння, отримаємо $4x + 4y + 4z + 4u + 4v = 12$, $x + y + z + u + v = 3$, звідси $x=2$, $y=-1$, $z=3$, $u=-1$, $v=-2$.

13. З умови випливає, що виконуються рівності $\frac{a}{b+c}+1=\frac{b}{a+c}+1=\frac{c}{a+b}+1.$, які можна подати у вигляді $\frac{a+b+c}{b+c}=\frac{b+a+c}{a+c}=\frac{c+a+b}{a+b}$. Звідси отримуємо а=в=с.

ПОДІЛЬНІСТЬ

1. Дано дроби $\frac{8}{15},\frac{18}{35}$. Знайти найменше з усіх чисел, при діленні якого на кожний даний дріб отримаємо цілі числа.
2. До числа 10 справа і зліва дописати по одній цифрі так, щоб отримати число, кратне 36.
3. До числа 13 справа і зліва дописати по одній цифрі так, щоб отримати число, кратне 45.
4. Три перші цифри п’ятицифрового числа – одиниці. Знайти це число, знаючи, що воно ділиться без остачі на 72.
5. Число $\overline{aabb}$ є повним квадратом. При яких числах а і в це можливо?
6. Знайти найменше натуральне число, яке закінчується цифрою 6 і збільшується у 4 рази, якщо його останню цифру поставити на перше місце.
7. Знайдіть усі пари цілих чисел x і y, які задовольняють рівняння $x^2+x=y^4+y^3+y^2+y$.
8. Знайти всі прості р, для яких число $p^2 + 14$ також буде простим числом.
9. Довести, якщо $p>3$ і р – просте число, то принаймі одне з $p+10$, $p+14$ не є простим .
10. Довести, що $p^2 - 1 \vdots 24$, якщо $p>3$ і р – просте число.
11. Знайти всі прості числа р і g , для яких $p^2- 2g^2 =1$.
12. Знайти всі прості числа а, в, с такі, що $a^2-c^4=b^2$.
13. Розв’язати в цілих числах : $xy – 2x – 3y + 1 = 0$.
14. Чи може різниця трицифрових чисел, записаних тими ж цифрами, але у зворотньому порядку, бути квадратом числа?
15. Довести, що коли число при діленні на 13 дає в остачі 6, то його квадрат при діленні на 13 дає в остачі 10.
16. Довести, що $\underbrace{11...1}_{2n}-\underbrace{22...2}_{n}$ - квадрат цілого числа.
17. Знайти всі прості числа р, що $8p^2 + 1$ теж просте.
18. Кілька з 6 аркушів розрізали на 7 кусків. Деякі знову розрізали на 7 кусків. Чи можна таким чином отримати 1991 кусок? 1992?
19. Доведіть, що коли $5x+2y$ ділиться на 17, то $9x +7y$ також ділиться на 17.
20. До деякого двоцифрового числа зліва і справа дописали по одиниці. Отримали число, в 23 рази більше, ніж попереднє. Знайти це двоцифрове число.
21. Знайдіть всі прості числа р і g такі, що $p+g = (p-g)^3$.
22. Сума цифр числа x дорівнює y, а сума цифр числа y дорівнює z. Знайдіть x, якщо $x + y + z =60$.
23. Якщо до деякого п’ятицифрового числа приписати зліва цифру 6, то утвориться число, в 4 рази більше, ніж дістали б, якщо цю цифру приписали б справа. Знайдіть це число.
24. Знайдіть трицифрове число, якщо його цифри відмінні від нуля, а сума всіх можливих двоцифрових чисел, складених з них дорівнює цьому трицифровому числу.
25. Нехай р і g – два цілі непарні числа. Довести, що рівняння $x^2 + 2px + 2g = 0$ не може мати раціональних розв’язків.
26. Остання цифра квадрату натурального числа дорівнює 6. Доведіть, що передостання цифра є непарною.
27. Доведіть, що якщо записати в зворотньому порядку цифри будь-якого натурального числа, то різниця даного і нового числа буде ділитися на 9.
28. Знайдіть найменше натуральне число, що ділиться на 36, в запису якого зустрічаються всі 10 цифр.
29. Знайдіть найменше число, що записується тільки одними одиницями, яке ділиться на 33...33 (в записі 100 трійок).
30. Розв’яжіть рівняння:
а) $x^2 + y^2 + z^2 = 8t – 1$; d) $3^m+7=2^n$; c) $3\cdot 2^m+1=n^2$.

31. Чи може n! закінчуватися на 5 нулів?
32. Чи може число, яке записується за допомогою 100 нулів, 200 одиниць і 100 двійок, бути точним квадратом?
33. Знайдіть найменше натуральне число, яке внаслідок множення на 2 стане квадратом, а внаслідок множення на 3 – кубом натурального числа.
34. Знайдіть трицифрове число, яке дорівнює квадрату двоцифрового числа і кубу одноцифрового числа.
35. На складі є цвяхи по 16, 17 і 40 кг. Чи можна взяти 140 кг цвяхів, не відкриваючи ні одного ящика?
36. Чи ділиться число 11...1 на 81(одиничок є 81)?

Розвязки

22. x =10a + в, y = a + в. Можливі два випадки : якщо a+в≤9, то z=a+b; якщо a+в>9, то z = a + в -9. У першому випадку (10a+в)+(a+в)+(a+в)=60.У другому випадку 4a+в=23. отже x є одне з чисел 44, 47, 50.
23. 15384.
24. 132, 264, 396.
25. $D/4 = p^2 - 2g = (2k+1)^2 - 2(2n+1) = 4k^2 + 4k + 1 - 4n - 2 = 4(k^2 + k - n) - 1$, цей вираз не може бути квадратом.
28. 1023457896.
32. перевірити ознаки на 3 та 9.

Принцип парності

1. Чи має розвязок в натуральних числах рівняння: $x^2-y^2=2006$?
2. У кожній вершині квадрати записано число. За один крок до кожного з двох чисел, розміщених на одному з ребер (будь-якому) додається по одиниці. Чи можна за кілька кроків дістати всі чотири числа рівними між собою, якщо спочатку в трьох вершинах записано нулі, а в четвертій одиницю?
3. Десять шашок розміщено в ряд. Будь–які дві шашки, що стоять через одну , можна поміняти місцями. Чи можна переставити всі шашки в зворотньому порядку?
4. На дошці записано числа 1,2,3,..., 1990. Дозволяється витерти будь-які два числа і замість них написати їх різницю. Внаслідок багаторазового повторення цієї операції на дошці залишиться одне число. Довести, що це число не може бути нулем.
5. Нехай x – n-значне число, y – число, яке можна одержати з x перестановкою цифр. Чи можлива рівність x+y=99...9 ?
6. Із звичайної шахової дошки вилучили два протилежних куточки великої діагоналі. Чи можна частину дошки, що залишилася , покрити 31 кісточкою доміно?
7. Чи можна всі натуральні числа від 1 до 65 розбити на кілька груп так, щоб у кожній групі найбільше число дорівнювало сумі інших?
8. Коло розбите точками на 3k дуг: по k дуг завдовжки 1, 2, і 3 . Довести, що знайдуться дві діаметрально протилежні точки.
9. У трьох вершинах квадрата сидять коники-стрибунці. Вони стали грати у таку гру: кожен із коників може стрибнути у точку, симетричну відносно одного з двох інших коників. Чи може хоча б один коник потрапити в четверту вершину квадрата?

Відповіді

4. Візьмемо будь-які два числа a і в. Тоді $\begin{array}{l} S_0 = S^* + a + b, S_1 = S^* + a - b. \\ S_0 - S_1 = (a+b) - (a-b) = 2b \end{array}$

Це означає, що після кожної операції сума чисел, записаних на дошці, зменшується на парне число. Таким чином, парність суми чисел, що залишаються на дошці не змінюється. Початкова сума $S_0 = \frac{1+1990}{2} \cdot 1990 = 1991 \cdot 995$- число непарне. Тому нуль на дошці дістати не можливо.

6. Кожна кісточка доміно покриває рівно одну білу і одну чорну клітинки, але на шаховій дошці білих – 32, а чорних – 30 клітинок.

7. Припустимо, що можна. Тоді в кожній групі сума чисел буде парним числом, тому сума всіх чисел від 1 до 65 теж має бути парним числом. Однак сума 1+2+...+65=65*33 – непарна. Отримали суперечність.

9. Ні. Введемо систему координат, у якій вершини квадрата мають координати (0;0), (0;1), (1;0), (1;1) і розглянемо, як змінюються координати коника-стрибунця при стрибку.

Модуль числа

1.Розвязати рівняння:

а) $|x-1|=2$; б) $|x|+x=2$; в) $||x|-x|=1$, г) $||x|+1|=1$; д) $||x|+x|=1$,

е) $||x-5|+3|=4$, є) $|\,|\,|x|-2|+3|-4|=3$, ж) $|3x-8|-|3x-2|=6$, з) $|x|+2|x-1|-3|x+2|=4$.

2. Накресліть графік функції:

а) $y=|3-2x|$, $y=3-2|x|$, $y=|3-2|x||$,

б) $y=|x+2|$, $y=2x+|x-3|$, $y=|x-2|+|x+3$, $y=\sqrt{x^2-4x+4}+\sqrt{x^2+4x+4}\,|$.

3. Накресліть графік залнжності:

а) $\frac{|x|}{x}+\frac{|y|}{y}=2$, б) $|2x|-x=|2y|-y$, в) $|x|+|y|=3$.

Задачі на відсотки

1. За пересилку грошей беруть 2% від суми, що пересилають. Яку найбільшу суму можна переслати, маючи на руках 1000 грн.
2. Книжка подорожчала на 25%, а потім подешевшала на 20%. Як змінилася ціна книжки порівняно з початковою?
3. Жіноче і чоловіче пальто мали однакову ціну. Жіноче подешевшало раз на15% і ще раз на 15%, а чоловіче відразу на 30%. Яке пальто зараз коштує дорожче?
4. Як зміниться площа прямокутника, якщо його довжину збільшити на 30%, а ширину зменшити на 30%?
5. Скільки води потрібно додати до 50 г 35% розчину, щоб отримати 10%?
6. Скільки 9% -ого оцту можна отримати з 90 г 80%-ої оцтової есенції?
7. У свіжомі кавуні 99% води. Після всихання вміст води становить 98%. У скільки разів кавун всохся?
8. Числа збільшили на 25% . На скільки відсотків треба зменшити нове число, щоб отримати початкове?
9. Руда містить 40% домішок, а виплавлений з неї метал – 4%. Скільки металу можна отримати з 24 т руди?
10. В яких пропорціях потрібно змішати 50-процентний і 70-процентний розчини кислоти, щоб отримати 65%-ий розчин цієї кислоти?
11. Скільки прісної води треба долити до 4л морської, щоб зменшити вміст солі в ній у 2,5 рази?
12. Кількість відсутніх учнів становить 1/6 присутніх. Після того, як з класу вийшов один учень, кількість відсутніх стала дорівнювати 1/5 кількості присутніх. Скільки учнів у класі?
13. У посудині було 12 л чистого спирту. Частину спирту відлили і посудину доповнили водою. Потім знову відлили і стільки ж долили води. Скільки відливали кожного разу, якщо отримали 25% розчин?
14. Щойно добуте кам яне вугілля містить 2% води, а після двотижневого перебування на повітрі воно містить 12% води. На скільки кілограмів збільшується маса добутої тонни вугілля після того, як воно два тижні пролежало на повітрі?
15. Із 22 кг свіжих грибів отримуємо 2,5 кг сухих грибів, що містять 12% води. Який процент води у свіжих грибах?
16. Група студентів приймала участь у кросі. Число студентів, що вклалися в норматив в інтервалі від 94, 2% до 94,4%. Яка найменша кількість студентів приймала участь у кросі?

17 Двоє робітників вийшли одночасно з дому і пішли на один і той же завод. У першого крок на 10% коротший, ніж у другого, зате він робив на 10% кроків більше, ніж другий. Хто з цих робітників швидше прийде на завод?

18. Декілька дівчат різного віку ходили в ліс по гриби. Зібрані ними гриби вирішили поділити порівну. Наймолодшій дали 20 грибів і ще 0,04 остачі. Середній за віком дали 21 гриб і ще 0,04 остачі. Третій - 22 гриба і 0,04 остачі і так далі. Скільки було дівчат? Скільки отримала грибів кожна?
19. Трудовий день зменшився з 8 до7 год. На скільки має зрости продуктивність праці, щоб при тих же розцінках заробітна платня зросла на 5%?
20. Населення міста зросло за два роки з 20 тис. до 22050 чоловік. Знайдіть щорічний середній відсоток приросту населення цього міста.
21. Один сплав складається з двох металів, маси яких відносяться, як 1:2, а другий містить ті самі метали, але маси їх відносяться, як 3:4. Скільки частин кожного сплаву потрібно взяти, щоб добути третій сплав, у якому маси тих самих металів відносилися би, як 15:22?

Відповідь

13. 6 л; **14**. на 114 кг; **15**. 90%; **16**.35 студентів; **17**. другий; **18.** 5 дівчат, 24 гриба; **19.** на 20%;

Задачі на рух

1. Автомобіль їхав з пункту А в пункт В зі швидкістю 60 км/год., а з В в А – зі швидкістю 80 км/год. Яка середня швидкість автомобіля?
2. Відстань між пристанями пароплав проходить за течією протягом 3 год., а проти течії – за 4 год. 30 хв. За який час цю відстань подолають на плоті?
3. Андрій йде з дому до школи 30 хв., а Петро – 40 хв. Петро вийшов з дому на 5 хв. раніше від Андрія. Через скільки хвилин Андрій наздожене Петра?
4. Хлопчик збіг вниз по рухомому ескалаторі і нарахував 30 сходинок. Потім він побіг вверх і нарахував 150 сходинок. Скільки сходинок він нарахував би , спускаючись по нерухомому ескалаторі?
5. Два пішоходи виходять назустріч один одному з А і В та зустрічаються через півгодини. Продовжуючи рух, перший прибув в В на 11хв. раніше, ніж другий в А . За який час кожен пройде шлях АВ?
6. Два хлопчики стартували на біговій доріжці довжиною 50 м з інтервалом 1с. Хлопчик, який стартував другим, наздогнав першого за 10 м від лінії старту, добіг до кінця доріжки і побіг назад з тією ж самою швидкістю. На якій відстані від кінця доріжки він зустрів першого хлопчика, коли відомо, що ця зустріч відбулася через 10 сек. після старту першого хлопчика?
7. Шлях від А до В йде 3 км вгору, 5 км з гори і 12 км рівним місцем. Цей шлях мотоцикліст проїхав за 1год. 7хв., а зворотній шлях за 1год. 16хв. Знайдіть швидкість мотоцикліста вгору і згори , якщо на рівному місті його швидкість була 18 км/год.
8. З міста А в місто В, відстань між якими 180 км, о 6 год. 30 хв. виїхали назустріч один одному автобус і легковий автомобіль. Їх зустріч відбулася о 7 год. 50 хв. Якщо автобус вийшов би на 1год. 15 хв. раніше, а легковий автомобіль на 15 хв. пізніше, то вони зустрілись би о 7 год. 35 хв. Яка швидкість автобуса і автомобіля?
9. Два брати йшли зі школи додому з однаковою швидкістю. Через 15 хв. ходьби перший брат повернув назад і побіг до школи. Добігши до неї, він одразу кинувся доганяти другого. В цей час другий брат, зменшивши свою швидкість в два рази. Продовжував іти додому. Коли перший брат наздогнав другого, вони пішли з початковою швидкістю і прийшли додому на 6 хв. пізніше звичайного. У скільки разів швидкість бігу першого брата більша за звичайну швидкість ходьби братів?
10. Пройшовши половину шляху, пароплав збільшив швидкість на 25% і тому прибув до пристані на півгодини раніше. Скільки часу потрібно було затратити на весь шлях?
11. Два велосипедисти рухаються по кругу в одному напрямі. Перший проїжджає весь круговий шлях за 6 хв., а другий – за 4 хв. Другий почав рухатися на 3 хв. пізніше за першого і з того самого пункту, що й перший. Коли другий велосипедист наздожене першого?
12. Із пункту С по кругу у протилежних напрямах виїжджають два велосипедисти. Перший об їжджає круг за 12 хв., а другий виїжджає із С на 5 хв. пізніше за першого і об їжджає круг за 10 хв. Коли велосипедисти зустрінуться?
13. Якщо Оля йде до школи пішки, а повертається автобусом, то затрачає на дорогу 1,5 год. Якщо їде туди і назад , то затрачає 30 хвилин. Скільки часу затратить Оля, якщо йтиме до школи і назад пішки?
14. Проїхавши половину шляху, пасажир заснув і спав до тих пір, поки не залишилося проїхати половину шляху від того, що він проїхав сплячим. Яку частину шляху він проїхав сплячим?
15. З А в В повзуть два жуки і повертаються назад. Перший повзе туди і назад з постійною швидкістю, а другий – туди в1,5 рази швидше, ніж перший, а назад в 1,5 рази повільніше, ніж перший. Котрий з них першим повернеться в А?
16. Бізнесмен щодня приїжджає на станцію в один і той час, і в цей же час за ним приїждає машина, на якій він їде на дачу. Одного разу бізнесмен приїхав на станцію на 55 хвилин раніше , пішов на зустріч машині і приїхав на дачу на 10 хвилин раніше, ніж завжди. У скільки разів швидкість бізнесмена менша від швидкості машини?
17. Два автомобілі , рухаючись по кільцевій дорозі з постійними швидкостями в одному напрямі, зустрічаються кожні 56 хвилин. При русі з тими ж швидкостями у протилежних напрямах зустрічаються через кожні 8 хвилин. За який час проїжджає всю кільцеву трасу кожен автомобіль?
18 . Військова колона має довжину 5 км. Зв’язківець, що виїхав з кінця колони, передав пакет на початок колони і повернувся назад. Колона за цей час пройшла 12 км. Який шлях проїхав зв’язківець?
19. Людина, спускаючись по рухомому ескалаторі, нарахувала 48 сходинок, а піднімаючись по рухомому ескалаторі , - 33 сходинки. Швидкість підйому людини відносно ескалатора у 2 рази менша від швидкості спуску. Швидкість ескалатора при спусті і підйомі одна і таж. Скільки сходинок нарахує людина, спускаючись по нерухомому ескалаторі?
20. Два школярі, що живуть в одному домі, одночасно вийшли з дому у школу. Перший з них половину всього часу, затраченого на дорогу, йшов зі швидкістю 5 км/год, а потім пішов із швидкістю 4 км/год.

другий же першу половину всього шляху від дому до школи йшов із швидкістю 4км/год., а другу – зі швидкістю 5 км/год. Який з школярів швидше прийде до школи?

Відповіді.

6.10м. **8**. 40 км/год. і 80 км/год. **9**. у 3 рази. **10**. 5год.

12. При розв'язуванні задач на рух по колу інколи зручно вимірювати швидкість у градусах за хвилину. Тоді швидкість першого велосипедиста - 360º :12=30 град/хв., а швидкість другого - 360º:10=38 град/хв.. Можна скласти рівняння:

30t + 36(t-5) =360, t=8 2/11 хв.

16. у 10 разів. **17.** 14 хв. **18.** 18 км.

19. 88 сходинок. X – число сходинок нерухомого ескалатора, y – швидкість ескалатора, z – швидкість людини при підйомі, швидкості вимірюються у сходинках за одиницю часу. Тоді 2xz/(2z+y)=48, xz/(z+y)= 33, звідси x/24- x/33 =1.

Задачі на роботу

1. На пасовище випустили 30 корів, які за 4 дні з їли всю траву. Коли виросла нова трава, випустили 25 корів, які за 4 дні з їли всю траву за 6 днів. Яка найбільша кількість корів може пастися на пасовищі постійно?
2. Трава на луці росте однаково густо і швидко. Відомо, що 70 корів з їли б її за 24 дні, а 30 корів – за 60. Скільки корів з їли б її за 96 днів?
3. Артілі косарів треба скосити дві луки, одна з яких вдвічі більша за іншу. Половину дня артіль косила велику луку. Після цього артіль поділилася навпіл: перша половина залишилася на великій луці і докосила її під вечір до кінця; друга ж половина косила малу луку, на якій до вечора залишилася ще ділянка, яку скосив один косар за весь наступний день. Скільки косарів було в артілі?
4. Швейний цех випускає за зміну 300 піджаків або 600 штанів. Скільки костюмів може випустити цех за зміну?
5. При спільній роботі двох тракторів різної потужності поле було зорано за 8 днів. Якби половину поля зорав один трактор, а потім закінчували роботу обидва разом, то на це було б затрачено 10 днів. За скільки днів зорав би поле кожен трактор окремо?

Відповідь.

1. 15; **2.** 20; **3**. 4; 4. 200; **5**.12 і 24;

Різні задачі

1. У кузні встановлено три парових молота. Удари кожного з них ідуть один за одним з інтервалами відповідно 1; 1,5; 2,5 секунд. Всі три молоти починають роботу одночасно. Скільки ударів зробив кожен молот, якщо було нараховано 111 ударів (удари, що співпали, сприймаються як один)?
2. На торговій базі є 7 однакових бочок, наповнених медом, 7 таких же бочок, наполовину порожніх, і 7 таких же порожніх бочок. Всі ці бочки потрібно розвести по трьох магазинах так, щоб вони отримали меду і бочок порівно. Як це зробити?
3. Із 100 туристів німецькою мовою володіє 30 чоловік, англійською мовою – 28, французькою – 42, англійською і німецькою - 8, англійською та французькою – 10, німецькою і французькою – 5, трьома мовами – 3. Скільки туристів не знає жодної мови, скільки знає тільки англійську, тільки французьку, тільки німецьку?
4. Марії 24 роки. Вона вдвічі старша, ніж була Анна тоді, коли Марії було стільки років, скільки зараз Анні . скільки років Анні?
5. Годинник показує 9 год. Через скільки хв. після цього хвилинна стрілка дожене годинну?
6. Через який найменший проміжок часу між стрілками годинника буде прямий кут, якщо зараз 12.00 год?
7. О 12 год. хвилинна і годинна стрілки співпадають. Через який найменший проміжок часу вони знову співпадатимуть?
8. Скільки разів на добу годинна і хвилинна стрілки співпадають?

Відповідь . **1.** 76, 51, 31; **3.** 20,13,30 і 20; **4.** 18 років.

5. О 9-ій огдині «відстань» між стрілками становила 270°. нехай t- час, за який хвилинна стрілка дожене годинну. Тоді 6t – 0,5t=270, t=49 1/11 хвилини.

8. Швидкість годинної стрілки у 12 разів менша, ніж швидкість хвилинної. Якщо за час між двома співпаданнями стрілок годинна пройде 1/n частину круга, то хвилинна – 12/n частин круга, або один оберт 1/n частину круга. Тобто, 12=1+1/n. Звідси n=11. За добу годинна стрілка робить два повних оберти, тому співпадань буде 2:1/11=22. Врахувавши перше співпадання, отримаємо 23.

ЗАДАЧІ НА ПРИНЦИП ДІРІХЛЕ

1. Чи можна з 100 довільних чисел завжди вибрати : а)15; б)16 таких чисел, щоб різниця будь-яких двох з них ділилася на 7?
2. Довести, що в кожному девятикутнику існує пара діагоналей, кут між якими менше 7^{o}.
3. У кожній клітинці дошки 5*5 сидить жук. У деякий момент часу всі жуки переповзають на сусідні (по горизонталі чи вертикалі) клітинки. Чи обов'язково при цьому залишаться вільні клітинки?
4. Довести, що серед чисел, що записуються тільки одиницями, є число, що ділиться на 1997.
5. Чи можна записати на дошці 57 різних двоцифрових чисел так, щоб серед них не було двох чисел, що в сумі дорівнюють 100?
6. У класі 25 учнів. Відомо, що серед будь-яких трьох з них є двоє друзів. Довести, що є учень, у якого не менше, ніж 12 друзів.
7. На площині дано 6 точок, жодні три з яких не лежать на одній прямій. Кожні дві точки сполучено відрізком або червоного, або синього кольору. Довести, що знайдеться трикутник з вершинами в даних точках, всі сторони якого мають один колір.
8. В ящику лежать кульки: 10 чорних, 10 синіх, 10 білих. Яку найменшу кількість кульок потрібно витягнути, не дивлячись, щоб серед витягнутих виявилось дві кульки: а) одного кольору; б) різних кольорів; в) чорного кольору?
9. Комісія з 60 осіб провела 40 засідань, причому на кожному були присутні рівно 10 членів комісії. Довести, що якісь два члени комісії зустрічалися на засіданнях хоча б двічі.
10. Довести, що з 52 цілих чисел завжди знайдуться два, різниця квадратів яких ділиться на 100.
11. Кожна точка площини пофарбована в чорний або червоний колір. Довести, що на цій площині знайдеться трикутник з кутами 30^{o}, 60^{o}, 90^{o} і гіпотенузою 2, вершини якого однокольорові.
12. Всередині квадрата зі стороною 1 розміщено кілька кіл, сума довжин яких дорівнює 10. Довести, що знайдеться пряма, як перетинає хоча б чотири з даних кіл.
11. Десять друзів відправили один одному по 5 листівок. Довести, що двоє друзів привітали один одного.
12. Довести, що серед 6 чоловік є 3 попарно знайомих або3 попарно незнайомі.

РОЗВ ЯЗКИ

1. Різниця двох чисел ділиться на 7, тоді і тільки тоді, коли остачі від ділення цих чисел на 7 однакові. Розділимо всі числа на 7 груп за однаковими остачами при діленні на 7. Очевидно, що буде існувати група, в якій є15 чисел. Якщо ж у кожній групі менше, ніж 15 чисел, то їх може бути лише $14 \cdot 7=98$, що суперечить умові. А от 16 таких чисел може не існувати.

2. Всього у дев ятикутнику $(9 \cdot 6):2=27$ діагоналей. Проведемо через довільну точку О 27 прямих, паралельних діагоналям . Ці прямі розбивають повний кут в 360^{o} на 54 частини. Якби всі частини дорівнювали 7^{o}, то в сумі б це дало $7 \cdot 54=368^{o}>360^{o}$. Тому існує кут, менший 7^{o}.

3. Розмалюємо дошку у вигляді шахової. Чорних клітинок буде 13, білих – 12. Очевидно, що коли всі жуки з білих клітинок переповзуть на чорні, то хоча б одна залишиться вільною.

4. Розглянемо числа вигляду 1, 11, 111, ... Серед них обов'язково будуть два, що мають однакові остачі при діленні на 1997. Отже, їх різниця буде ділитися на 1997, тобто існує число виду $11...1 \cdot 10^{k}$, що ділиться на 1997, але 10^{k} і 1997 прості.

5. Розіб'ємо всі числа від 1 до99 на пари (1;99), (2;98), ... ,(49;51) так, щоб сума в кожній парі дорівнювала б 100. Пар є 49, а чисел 57, отже, якась пара мусить бути заповнена.

6. З точки A_1 проведено 5 відрізків двох кольорів. За принципом Діріхле серед них є 3 відрізки одного кольору. Нехай це відрізки A_1A_2, A_1A_3, A_1A_4 червоного кольору. Розглянемо відрізки A_2A_3, A_2A_4, A_3A_4. Можливі випадки: а) серед цих відрізків є червоний, наприклад, A_2A_3. Тоді в трикутнику $A_1A_2A_3$ всі сторони червоні; б)серед цих відрізків немає червоних. Тоді в трикутнику $A_2A_3A_4$ всі сторони сині.

11. Розгляньте всі такі трикутники зі спільною гіпотенузою.

12. Всього листівок 10*5=50. Доводимо методом від супротивного. До першого може прийти лише 4 листівки (відкидаємо його самого і 5 його адресатів). Тоді листівок буде 4*10=40.

Ігри

1. Маємо три купки каменів: у першій – 10, у другій – 15, у третій – 20. За хід дозволяється розділити будь-яку купу на дві менші; програє той, хто не може зробити хід.
2. У коробці знаходиться 60 сірників. За один хід дозволяється взяти будь-яку кількість від 1 до 5 сірників. Програє той, хто не може зробити хід. Хто з гравців (перший чи другий) може забезпечити собі виграш?

3. На колі розставлено 20 точок. За хід дозволяється сполучити будь-які з них відрізком, що не перетинає відрізків, які проведені раніше. Програє той, хто не може зробити хід.

Відповіді.

1. Вся гра триває рівно 45-3=42 ходи. Другий гравець завжди виграє.

2. Початкова позиція є виграшна для другого гравця, а його виграшною стратегією є доповнення ним ходів першого гравця до 6 сірників.

3. Перший гравець. Перший хід – провести хорду, що ділить точки порівно, а далі по симетрії.

ІНВАРІАНТИ

1. На дошці написано числа 1, 2, 3, ...19, 20. Дозволяється стерти будь-які два числа а і в і замість них написати число (а+в-1). Яке число може залишитися після 19 таких операцій?

2. На дошці написано числа 1, 2, 3, ...19, 20. Дозволяється стерти будь-які два числа а і в і замінити їх на число ав+а+в. Яке число може залишитися після 19 таких операцій?

3. На дошці написано числа 1, 2, 3, ...1989. Дозволяється стерти будь-які два числа і написати замість них різницю. Чи можна досягти того, щоб всі числа дорівнювали нулю?

Відповіді.

1. 191.

2. Розгляньте числа, збільшені на 1.(21)!-1.

3. Інваріантом є парність суми. Ні.

Логічні задачі

1. Маємо аркуш паперу. Його розрізують на 8 або 12 частин. Кожну з частин, що дістають після розрізування, знову розрізують на 8 або 12 частин або залишають без змін. Чи можна таким чином отримати 60 частин аркуша.

2. Летів табун сороканіжок і триголових драконів. У них всього 26 голів і 298 ніг. У кожної сороконіжки одна голова. Скільки ніг у триголових драконів?

3. Андрій пішов у тир. Була домовленість: він робить 5 пострілів і за кожне попадання отримує право ще на два постріли. Всього Андрій вистрілив 25 разів. Скільки було попадань?

4. В чемпіонаті по футболу в один круг п'ять команд А,Б,В,Г,Д зайняли місця в тому ж порядку, починаючи з першого. Команда А не має ні однієї нічиї, Б не програла ні однієї зустрічі, Г не виграла ні однієї гри. Всі команди набрали різну кількість очок. Відновіть турнірну таблицю. Перемога – 2 очки, нічия – 1 очко, програш – 0.

5. Шість шахматистів : А,Б,В,Г,Д,Е – зіграли в один круг. А зіграв всі партії внічию, Б не програв ні однієї зустрічі, В виграв у переможця і зіграв внічию з Д. Г випередив Д, але відстав від Е. Хто скільки очок набрав? Перемога – 1очко, нічия – ½, поразка – 0.

6. У велогонках брало участь 5 школярів. Після гонок 5 болільників заявили:
„Микола зайняв I місце, а Іван - IV ",
„Сергій зайняв II місце, а Іван - IV ",
„Сергій зайняв II місце, а Микола - III "
„Толя зайняв I місце, а Надя - II "
„Надя зайняла III місце, а Толя - V ". Знаючи, що одне з висловлень кожного болільника вірне, а інше – хибне, вказати правильний розподіл місць.

7. Гном обманює в понеділок, вівторок і середу. В які дні він може заявити: а) „Я обманював вчора", б)"Я буду обманювати завтра", в) „Я обманював вчора і буду обманювати взавтра"?

8. Жителі села А завжди кажуть правду, села Б – обманюють, а жителі В - через раз. Черговому пожежної частини, що побачив вогонь, подзвонили:
- У нас пожежа, приїжджайте негайно!
- Де? – питає черговий .
- У селі В – була відповідь. Куди виїхала пожежна машина?

9. Як можна принести з річки 6 л води, якщо є лише два відра: одне – ємністю 4л, а друге – 9л?

10. У бочці більше, ніж 13 літрів бензину. Як відлити з неї 8л з допомогою 9-літрового та 5- літрового відер?

11.12- літрова бочка наповнена молоком. Як розлити її на дві рівні частини, користуючись 9-ти літровим та 8-ми літровим відром?

Відповіді.

1. Після кількох розрізувань отримаємо 1+7k+11n частин аркуша, де k- кількість розрізувань на 8 частин, n - кількість розрізувань на 12 частин. Рівняння 1+7k+11n =60 не має розв'язків у цілих числах, бо n=(59-7k)/ 11 при жодному цілому $0 \le k < 8$ не буде цілим числом.

	А	Б	В	Г	Д	очки

2. 14 ніг.

4. таблиця

А	-	0	2	2	2	6
Б	2	-	1	1	1	5
В	0	1	-	1	2	4
Г	0	1	1	-	1	3
Д	0	1	0	1	-	2

6. Сергій - I, Надя - II , Микола - III, Іван -IV , Толя -V

Геометрія

1. Довести, що бісектриса прямого ку та ділить навпіл кут між висотою і медіаною.
2. Бісектриса кута при основі рівнобедреного трикутника відтинає від нього інший рівнобедрений трикутник. Знайти величини кутів початкового трикутника.
3. Бісектриса кута при вершині трикутника утворює з основою кут 82º, а з бісектрисою одного з кутів при основі - 55º. Знайти кути трикутника.
4. Висота і медіана, проведені з однієї вершини, поділили кут на три рівні частини. Знайти величини кутів трикутника.
5. Більша діагональ ромба ділить висоту, проведену з вершини тупого кута, у відношенні 1:2. Знайти кути ромба.
6. З протилежних вершин прямокутника опущені перпендикуляри на діагональ. Основи перпендикулярів ділять діагональ на три відрізка, сума двох з них дорівнює третьому. Знайти кути, на які діагональ ділить прямий кут.
7. Серединний перпендикуляр до діагоналі ділить його сторону на частини, одна з яких вдвічі більша, ніж друга. Знайти кути, на які діагональ ділить прямий кут.
8. Висота, проведена з вершини тупого кута ромба, ділить навпіл протилежну сторону. Знайти кути ромба.
9. Всередині квадрата взято точку К, і на відрізку АК як на стороні побудовано квадрат АКЕМ, сторона якого перетинає сторону АД квадрата АВСД. Доведіть, що ВК=ДМ.
10. На сторонах паралелограма : а) зовні; б) всередині його побудовано квалрати. Доведіть, що чотирикутник, вершинами якого є центри квадратів, таож є квадратом.
11. На сторонах ВС і СД квадрата АВСД відмітили точкиМ і Е так, що кути ВАМ і МАЕ рівні. Доведіть, що АЕ=ВМ+ДЕ.
12. У паралелограмі АВСД точки Е і F- середини сторін АВ іСД відповідно. Доведіть, що прямі BF і ДЕ ділять діагональ на три рівні частини.
13. На сторонах ВС і АД паралелограма АВСД відмічені точки М і К так, що ВМ:МС = ДК:КА = 1:3. У якому відношенні прямі АМ і СК ділять діагональ ВД?
14. У трикутнику АВС на медіані ВМ відмічено точку Е так, що ВЕ:ЕМ=3:2.пряма АЕ перетинає сторону ВС в точці К. У якому відношенні точка К ділить відрізок ВС, рахуючи від точки В?
15. На стороні АС трикутника АВС взято точку Е так, що АЕ:ЕС=3:4. у якому відношенні медіана АМ : а) ділить відрізок ВЕ; б) ділиться відрізком ВЕ?
16. Діагоналі паралелограма АВСД перетинаються в точці О. Відомо,

Відповіді

6. 60°, 30°; **8.** 60°, 120°; **11.** На продовженні сторони СД за точку Д відмітимо точку К так, що ДК=ВМ. Задача зводиться до доведення рівності відрізків АЕ і КЕ. Нехай <ВАМ = α, тоді < ЕАД =90°-2α. З рівності трикутників АВМ і АДК слідує, що <ДАК= α., <ДКА=90°-α. Отже, <ЕАК=(90°-2α)+α=90°- α. Таким чином, у трикутнику ЕАК рівні кути ЕАК і ЕКА, тобто АЕ=КЕ.

14. 3:4. Через точку М проведіть пряму, паралельну до прямої АК.

15. 8:9; **16.** 15:2;

1. Побудувати рівнобедрений трикутник за бічною стороною і медіаною, проведеною до бічної сторони.
2. Побудувати трикутник за стороною і медіанами, проведеними до двох інших сторін.
3. Побудувати трикутник за стороною, протилежним кутом і висотою, опущеною на одну з двох інших сторін.
4. Побудувати трикутник АВС за <А=α, h_a, h_b.
5. Побудувати трикутник за стороною, проведеною до неї медіаною та висотою, опущеною на другу сторону.

6. Побудувати прямокутний трикутник за гострим кутом α і різницею гіпотенузи і протилежного куту α катета.
7. Побудувати трикутник, якщо дано сторону, прилеглий до неї кут і різницю двох інших сторін.
8. Побудувати трикутник, якщо дано сторону, прилеглий до неї кут і суму двох інших сторін.
9. Побудувати трикутник за висотою, периметром і кутом при основі.
10. Побудувати трикутник АВС за вершиною А і точками М і К, в яких вписане коло дотикається до сторін АС і ВС.
11. Побудувати трикутник за стороною, протилежним кутом і радіусом вписаного кола.
12. Побудувати рівнобедрений трикутни за основою і сумою однієї з бічних сторін з висотою.
13. Побудувати рівнобедрений трикутник за даним периметром і кутом при основі.
14. Поряд із залізницею розміщено два села А і В. Знайти на лінії залізниці, що має прямолінійну форму, місце для станції, яка б була однаково віддалена від А і В.
15. Побудувати прямокутний трикутник за гіпотенузою с і медіаною m, проведеною до одного з катетів.
16. Побудуйте паралелограм за двома сторонома і кутом.
17. Побудуйте паралелограм за основою, висотою і діагоналлю.
18. Побудуйте паралелограм за стороною і двома діагоналями.
19. Побудуйте ромб за діагоналлю і протилежним кутом.
20. Побудуйте трапецію за основами і діагоналями.
21. Побудуйте трапецію за основами і бічними сторонами.
22. Побудуйте прямокутний трикутник за гострим кутом α і різницею катетів m.
23. Побудувати прямокутний трикутник за гіпотенузою с і сумую катетів s.
24. Побудувати трикутник за стороною, висотою, опущеною на цю сторону, і медіаною, проведеною до однієї з двох інших сторін.
25. Побудувати трикутник за кутом при вершині, висотою, проведеною з цієї вершини і радіусом описаного кола.
26. Побудувати трикутник за кутом при вершині, медіаною, проведеною з цієї вершини, і радіусом описаного кола.
27. Побудувати трикутник за основою, висотою, опущеною на основу, і кутом при основі.
28. Побудувати трикутник за двома сторонами в і с та різницею кутів, які лежить проти цих сторін.
29. Побудувати відрізок так, щоб середина його була в даній точці Р, а кінці на даній прямій а і на даному колі.
30. Дано прямі, що перетинаються, і точка, яка не лежить на цих прямих. Побудуйте відрізок з кінцями на даних прямих і серединою в даній точці.
31. Дано три прямі а, в, с, що перетинаються. Побудуйте відрізок, перпендикулярний до прямої в, середина якого лежить на прямій в, а кінці – на прямих а і с.
32. Побудувати квадрат, якщо дано його центр і дві точки, що лежать на прямих, які містять дві протилежні сторони квадрата.
33. Дано пряму а і дві точки А і В з одного боку від прямої а. Знайти на прямій точку Х таку, що сума АХ+ХВ була найменшою.
34. Дано гострий кут АВС і точку М усередині його. Знайти на сторонах кута такі точки Х і У, щоб трикутник МХУ мав найменший периметр.
35. У даний гострокутний трикутник АВС вписати трикутник DEF з найменшим периметром, якщо положення вершини Д на основі АС задане.

Розвязання.

4. Побудувавши допоміжний трикутник АВС (<А=α, <Е=90°, ВЕ= h_b) , знаходимо сторону АВ шуканого трикутника. Щоб побудувати <В, достатньо побудувати допоміжний трикутник АВД (АВ=с, АД= h_a , <Д=90°). Отже, відомі АВ=с, <А, <В, тому можна побудувати трикутник АВС.

5. Нехай трикутник АВС – шуканий і ВС=а, АД= m_a , КВ=h_b . Будуємо трикутник ВКС (ВС=а, <К=90°, КВ=h_b). Знаходимо точкуД – середину відрізка ВК. З точки Д радіусом m_a описуємо коло. Знаходимо точку А перетину цього кола і прямої СК. Точки А і В сполучаємо . Трикутник АВС – шуканий.

7. Виділяємо два випадки: а) прилеглий до основи кут лежить проти меншої сторони; б) прилеглий до основи кут лежить проти більшої сторони. Розглянемо перший випадок. Нехай АВС – шуканий трикутник. На стороні ВС відкладаємо відрізок ДС=АС. Тоді ВД= a-b. Трикутник АВД можемо побудувати за двома сторонами і кутом між ними. Цим самим будуть побудовані дві вершини А і В трикутника. Третя вершина С задовільняє дві умови: лежить на однаковій відстані від точок А і Д та на продовженні відрізка ВД. Отже, точка перетину серединного перпендикуляра до відрізка АД і продовження ВД є третьою вершиною С трикутника.

8. Будуємо трикутник АВД (АВ=с, АД=b+a, <A=α), серединний перпендикуляр m до відрізка ВД; знаходимо точку С перетину m і АД, відрізок ВС.
15. Будуємо відрізок АВ=с, точку C_1 - середину відрізка АВ, точку C_2 – середину відрізка BC_1, кола з центром C_2 і радіусом с/4 і з центром А і радіусом m, точки A_1 і A_2 перетину цих кіл, півпряму BA_1, точку С перетину кола з центром C_1 і радіусом с/2 з півпрямою BA_1. Трикутник АВС - шуканий.
16. Виконуємо малюнок-ескіз. Трикутник АСД – допоміжний, оскільки його можна побудувати за двома сторонами і кутом між ними (АД= a, ДС=b, , <АДС=α). Побудувавши цей трикутник, знайдемо вершини А, Д і С. Четверта вершина є точкою перетину кіл з центрами А і С і радіусами b і a.
19. Задача зводиться до побудови прямокутного трикутника за катетом d/2 і протилежним кутом | α/2. використовуємо такі властивості ромба: діагоналі є бісетрисами його кутів , діагоналі перетинаються під прямим кутом і діляться точкою перетину навпіл.
20. На малюнку-ескізі допоміжного трикутника немає. Для його утворення потрібно продовжити більшу основу АД на відрізок, що дорівнює меншій основі ВС, і зєднати точки С і К. Дістанемо допоміжний триутник АКС, який має дві спільні вершини з шуканою трапецією і який можна побудувати за трьома сторонами. Встановлюємо, що вершина В трапеції є точкою перетину прямої с||АК та кола з центром С і радіусом b, а вершина Д – прямої АК та кола з центром К і радіусом b.
21. Вершини А і Д трапеції відомі, а вершини В і С – шукані. Якщо провести пряму СК||АВ, то точка С є вершиною трикутника КСД, який можна побудувати за трьома сторонами (КС=с, СД=d і КД= a-b). Продовжимо сторону ДК за точку К. Відкладаємо відрізок АД=а. Проводимо СМ||АД. На прямій СМ від точки С відкладаємо відрізок ВС= b. Сполучаємо точки А і В.
22. Нехай Δ АДС – шуканий і , <A=α, АД-ДС=m. На більшому катеті АД відкладаємо від точки Д відрізок ВД, що дорівнює меншому катету ДС. Утворений прямокутний трикутник ВСД – рівнобедрений за побудовою, тому , <ДВС= <ДСВ=45°. Звідси , <АВС=180°-<ДВС=180°-45°=135°. Отже, трикутник АВС можемо побудувати за стороною АВ і двома прилеглими кутами: <ВАС=α і <АВС=135°. Цим самим будуть побудовані дві вершини А і С шуканого трикутника. Третя вершина Д задовільняє дві умови: 1) лежить на продовженні сторони АВ; 2) лежить на перпендикулярі, опущеному з вершини С на продовження сторони АВ .
25. Будуємо коло даного радіуса R. З довільної точки К кола проводимо довільну хорду АК. На хорді АК від точки К будуємо <АКС, що дорівнює дагому куту. Точку перетину сторони кута з колом позначаємо С. Сполучаємо точки А і С. Відрізок АС – основа шуканого трикутника. Проводимо пряму а, паралельну АС і віддалену від АС на h (з тієї сторони хорди СА, де лежить точка К). Точки В і B_1 перетину прямої а з колом сполучаємо з точками А і В. Δ АВС – шуканий.
30. Припустимо, що задача розвязана і BB_1 – шуканий відрізок. Оскільки точка О – середина BB_1, то точки В і B_1 симетричні відносно точки О. Точка В лежить на прямій а, отже, симетрична їй точка B_1 лежатиме на прямій a_1, яка симетрична а відносно точки О. Таким чином, точка B_1 повинна бути точкою перетину прямих в і a_1.

Зразки екзаменаційних завдань
8 клас.

1. Обчисліть не перемножуючи багатоцифрові числа:
$a)\dfrac{20002\cdot 20003-20003}{20001^2+40002};b)\dfrac{78-20003\cdot 20081}{20003+20081\cdot 20002}.$
2. Дано трицифрове число, з нього отримали два чотирицифрових. Перший раз до нього дописали цифру 5 справа, другий раз – зліва. Сума утворених чисел дорівнює 15081. знайдіть дане число.
3. У селищі К живуть 100 чоловік. Частина з них завжди говорить правду, а решта – завжди неправду. Кожному жителю селища щастить в один з трьох днів – понеділок, середу або пятницю. Серед усіх жителів було проведено опитування, яке містило три запитання:
1) чи щастить тобі у понеділок?
2) чи щастить тобі у середу?
3) чи щастить тобі у пятницю?
На перше запитання «так» відповіли 80 чоловік, на друге – 40, на третє – 50. Скільки в селищі людей, які завжди говорять правду?
4. А) У прямокутному трикутнику АВС <A=30°, <C=90°, СД – висота. Знайдіть довжину відрізків АД та ДВ, якщо АВ=200см.

Б) У прямокутнику АВСД довжина більшої сторони Ад=30см. <ВДА=30°. Через точку О – середину діагоналі ВД – проведено пряму, перпендикулярну до ВД. Знайдіть довжини відрізків, на які цей перпендикуляр ділить більшу сторону.
5. Знайдіть усі такі восьмицифрові числа, які містять дві «1», дві «2», дві «3», «4», а між двома одиницями одна цифра, між двома двійками дві, між двома трійками – три, а між двома четвірками – чотири.

9 клас.

1. . Дано трицифрове число, з нього отримали два чотирицифрових. Перший раз до нього дописали цифру 5 справа, другий раз – зліва. Сума утворених чисел дорівнює 15081. знайдіть дане число.

2. Розвязати рівняння : $\left(\frac{37}{21}x\right)^3 = p,$ де р – середнє арифметичне чисел

$$A = \frac{158^2 + 158\cdot 185 + 185^2}{158+185}; B = \frac{158^2 - 158\cdot 185 + 185^2}{158-185}.$$

3. Скільки різних значень може приймати вираз? Скільки серед них непарних чисел?

$$A)\frac{|x-1|}{x-1}+\frac{|x-2|}{x-2}+\frac{|x-3|}{x-3}; B)\frac{|x-1|}{x-1}+\frac{|x-2|}{x-2}+\frac{|x-3|}{x-3}+...+\frac{|x-2003|}{x-2003}.$$

4. На стороні АС трикутника АВС взята точка Е так, що АЕ:ЕС=3:4. У якому відношенні медіана АМ ділить відрізок ВЕ?
5. Знайдіть, скільки є пар (х;у) з обома цілими х та у, що задовільняють умову:
А) |х|+|у|=7;
Б) |х|+|у|=2002;
В) Нехай S(n) кількість пар(х;у) з обома цілими х та у, що задовільняють умову |х|+|у|=n. Знайдіть S(2002)-S(2000).

Розвязки

1.
$$A)\frac{20002\cdot 20003 - 20003}{20001^2 + 40002} = \frac{20003(20002-1)}{20001(20001+2)} = 1.$$

$$B)\frac{78 - 20003\cdot 20081}{20003 + 20081\cdot 20002} = \frac{78 - 20003^2 - 20003\cdot 78}{20003 + (20003+78)(20003-1)} = \frac{78 - 20003^2 - 20003\cdot 78}{-78 + 20003^2 + 20003\cdot 78} = -1.$$

2. Позначимо трицифрове число $\overline{abc}$. Тоді

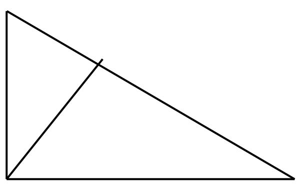
$$\overline{5abc} + \overline{abc5} = 15081$$

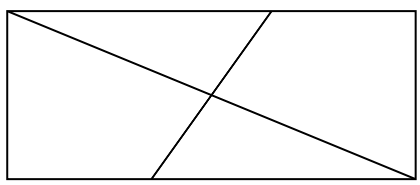
$$5000 + \overline{abc} + 10\cdot\overline{abc} + 5 = 15081$$

$$11\cdot\overline{abc} = 10076$$

$$\overline{abc} = 916.$$

3. Позначимо через х кількість тих людей, які завжди говорять правду. Кожен з них на три запропонованих запитання дасть тільки одну відповідь «так». Решта (ті, що завжди говорять неправду) дадуть по дві відповіді «так». Звідси х+2(100-х)=80+40+50,х=30.
4. а) У прямокутному трикутнику АВС з гострим кутом 30°катет, що лежить навпроти цього кута, вдвічі коротший від гіпотенузи. Оскільки АВ=200 см, то ВС=100 см, тоді ВД=50 см, а АД=150см.





В) Оскільки в прямокутнику діагоналі рівні і точкою перетину діляться навпіл, то трикутник АОД рівнобедрений з кутом при основі 30°. <АОД=120°, тому <АОК= 30°, отже, трикутникАОК рівнобедрений, АК=КО. З прямокутного трикутника КОД КД=2КО. Отже, АД=10 см, КД=20 см.
5. Нехай восьмицифрове число записане :********. Тоді четвірки у ньому можна розмістити одним з трьох способів:
1) 4****4**; 2) *4****48; 3) **4****4.
Розглянемо, як можнп розмістити трійки в кожному з цих способів.
1 спосіб: а) 4**3*4*3; б) 4*3**43*

2 спосіб: а) 34**3*4*; б) *4*3**43
3 спосіб: а)3*4*3**4; б) *34**3*4
Розмістити двійки і одиниці можна тільки тоді, коли четвірки та трійки розміщені способами 1б і 3б. Для кожного з цих способів існує єдине розміщення двійок і одиниць:
1б) 41312432; 3б) 23421314

9 клас (2003р.)
1. Позначимо трицифрове число $\overline{abc}$. Тоді

$$\overline{5abc} + \overline{abc5} = 15081$$

$$5000 + \overline{abc} + 10 * \overline{abc} + 5 = 15081$$

$$11 * \overline{abc} = 10076$$

$$\overline{abc} = 916$$

$$p = \frac{A+B}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{158^2 + 158*185 + 185^2}{158+185} + \frac{158^2 - 158*185 + 185^2}{185-158}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{(185-158)(158^2 158*185 + 185^2) + (158+185)(158^2 - 158*185 + 185^2)}{(158+185)(185-158)}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{185^3 - 158^3 + 185^3 + 158^3}{243*27}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{2*185^3}{7^3 * 3^3}\right) = \left(\frac{185}{21}\right)^3$$

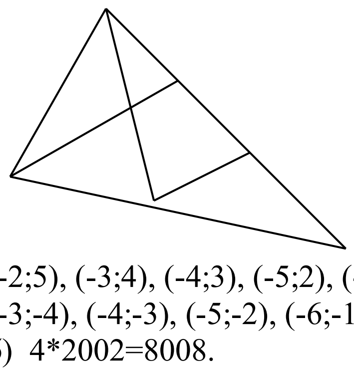
Тоді $\left(\frac{37}{21}x\right)^3 = \left(\frac{185}{21}\right)^3, \frac{37}{21}x = \frac{185}{21}, x = \frac{185}{37} = 5$

3.

А) Зауважимо, що кожен доданок може приймати лише два різних значення -1, та 1. Винесемо на числову пряму точки, в яких вирази під модулем будуть міняти свій знак. Ці точки розбивають числову пряму на чотири проміжки, на кожному з яких вираз приймає постійне значення. Спростивши даний вираз на кожному з отриманих проміжків, отримуємо чотири можливі значення: -3, -1, 1, 3.

Б) Аналогічно до випадку А) отримаємо 2004 проміжки, на кожному з яких вираз приймає постійне значення.
1) Нехай x<1. Тоді значення виразу дорівнює -2003 (бо кожен з доданків дорівнює -1).
2) Нехай k < x < k+1, де $k \in \{1;2;...;2002\}$. Перші k доданківдорівнюють -1, а всі решта доданків дорівнюють 1. В цьому випадку значення виразу буде дорівнювати
$(-1)*k + 1*(2003-k) = 2003 - 2k$.(Всього 2002 різних значень).
3) Нехай x>2003. Тоді значення виразу дорівнює 2003 (бо кожен з доданків дорівнює 1).
Відповідь: 2004.

4. Через точку Е проведено пряму ЕК паралельно до АМ. Тоді за теоремою Фалеса $\frac{MK}{KC} = \frac{AE}{EC} = \frac{3}{4}$.
Позначимо МК=3х, КС=4х, тоді ВМ=МС=7х. В трикутнику ВЕК FM$\|$ЕК. За теоремою Фалеса
$\frac{BF}{FE} = \frac{BM}{MK} = \frac{7x}{3x} = \frac{7}{3}$. 5
5. а) Випишемо пари чисел, що



задовольняють умову задачі: (0;7), (1;6), (2;5), (3;4), (4;3), 5;2), (6;1), (-1(;6), (-2;5), (-3;4), (-4;3), (-5;2), (-6;1), (-7;0), (1;-6), (2;-5), (3;-4), (4;-3), (5;-2), (6;-1), (7;0), (0;-7), (-1;-6), (-2;-5), (-3;-4), (-4;-3), (-5;-2), (-6;-1).
б) 4*2002=8008.

в) З попереднього прикладу S(2002)=4*2002; S(2000)=4*2000;
S(2002)-S(2000)=4*2002-4*2000=8008-8000=8.

Список використаної літератури.

1. «Алгебра 7 клас» за редакцією С.О. Теляковського,
2. «Збірник вправ з геометрії для 6-7 класів» Л.М. Лоповок,
3. «Збірник задач з математики» В.А. Вишенський,
4. «Курс геометрії 8-го класу в задачах» М.Л. Галицький, О.М. Гольдман, Л.І. Звавич,
5. «Розв язування задач на побудову у 6-8 класах» М.І. Бурда,
6. «Сборник олимпиадных задач по математике» Н.В. Горбачев,

7. «Факультативні заняття з математики у 6-7 класах » К.С. Дмитрів, М.С. Дмитрів.