7 клас

1. Відомо, що в понеділок Настя добиралася на автомобілі на роботу більше однієї години. Також відомо, що протягом будь-якої години руху середня швидкість її автомобіля дорівнювала 80 км/год. Чи могла його середня швидкість протягом усього шляху дорівнювати 100 км/год?

2. У Олесі є необмежена кількість цифр 3 та рівно одна цифра 4. Вона хоче утворити число, яке б ділилося на найбільшу можливу кількість чисел з множини: $\{1, 2, 3, \ldots, 9\}$. Яке найменше число може утворити Олеся?

(Рубльов Богдан)

3. У клітини дошки 8×8 можна ставити зірочки (не більше 1 зірочки у клітину) таким чином, щоб у кожному рядку, кожному стовпчику та кожній діагоналі було не більше ніж 4 зірочки. Яку максимальну кількість зірочок можна поставити на дошку за таких умов?

4. У чотирикутнику $ABCD$ виконується умова $AD = AB + CD$. Бісектриси кутів BAD і ADC перетинаються в точці P, як це показане на рис. 2. Доведіть, що $BP = CP$.

(Рожкова Марія)

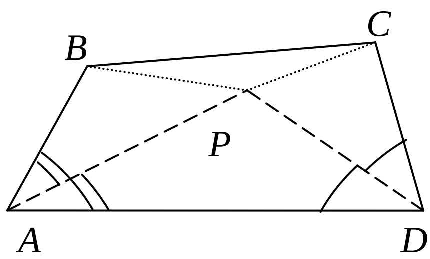

Рис. 2

3.1. У клітини дошки 6×6 можна ставити зірочки (не більше 1 зірочки у клітину) таким чином, щоб у кожному рядку, кожному стовпчику та кожній з двох великих діагоналей було не більше ніж 3 зірочки. Яку максимальну кількість зірочок можна поставити на дошку за таких умов?

4.1. Сторони трикутників ABC та ACD задовольняють такі умови: $AB = AD = 3$см, $BC = 7$см, $DC = 11$см. Які значення може приймати довжина сторони AC, якщо вона дорівнює цілій кількості сантиметрів, є середньою у ΔACD та найбільшою у ΔABC?

8 клас

1. Задача № 1 за 7 клас.

2. Відомо, що M та N два послідовних чотирицифрових числа. Яке найбільше значення може приймати різниця між сумами цифр чисел M та N?

Відомо, що M та N два послідовних чотирицифрових числа. Яке найбільше значення може приймати різниця між сумами цифр чисел M та N?

3. Чи можна розставити у комірках таблиці 3×5 числа 1, 2, ..., 15 таким чином, щоб:
а) суми чисел в усіх рядках були однакові, а також, щоб суми чисел в усіх стовпчиках були однакові, але, можливо, відмінні від сум чисел у рядках;
б) суми чисел в усіх трьох рядках та усіх п'яти стовпчиках були однакові?

(Рубльов Богдан)

4. Нехай $p(a)$ – найменший дільник натурального числа $a>1$, що не дорівнює 1.

а) Доведіть, що рівняння:

$$m+n=\bigl(p(m)+p(n)\bigr)\bigl(p(m)-p(n)\bigr),$$

де m, n взаємно прості натуральні числа, має нескінченно багато розв'язків в натуральних числах, що не дорівнюють одиниці.

б) Знайдіть усі такі натуральні числа $m>1$, для яких існує принаймні одне натуральне $n>1$ таке, що справджується рівність:

$$m+n=\bigl(p(m)+p(n)\bigr)\bigl(p(m)-p(n)\bigr).$$

(Чорний Максим)

5. Заданий рівносторонній ΔABC, у якого A_1, B_1, C_1 – середини сторін BC, AC, AB відповідно. Пряма l проходить через вершину A, позначимо через P, Q – проекції точок B, C на пряму l відповідно (пряма l та точки Q, A, P розташовані так, як це показано на рис. 6). Позначимо через T – точку перетину прямих B_1P та C_1Q. Доведіть, що пряма A_1T перпендикулярна прямій l.

(Сердюк Назар)

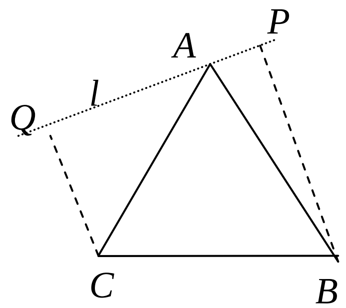

Рис. 6

4.1. Прості числа p, q та натуральні x, y задовольняють умови: $x<p$, $y<q$ та $\frac{p}{x}+\frac{q}{y}$ – ціле число. Доведіть, що $x=y$.

***Розв'язання*.** За умовою, $py+qx \,\vdots\, xy \Rightarrow py+qx \,\vdots\, x \Rightarrow py \,\vdots\, x \Rightarrow y \,\vdots\, x$, аналогічно $x \,\vdots\, y$, що й треба було довести.

5.1. На стороні AB трикутника ABC відмітили точку K. Відрізок CK перетинає медіану AM у точці F. Відомо, що $AK=AF$. Знайдіть відношення $MF:BK$.

9 клас

1. Знайдіть натуральне число n, для якого існує найбільша кількість пар ненульових цифр a, b, що задовольняють умову: $\overline{ab}-\overline{ba}=n$.

2. Два кола c_1, c_2 проходять через центр O кола c та дотикаються до нього внутрішнім чином у точках A та B відповідно. Доведіть, що на прямій AB лежить спільна точка кіл c_1, c_2.

3. ***а)*** Чи можна розставити у комірках таблиці 3×5 числа 1, 2, ..., 15 таким чином, щоб суми чисел в усіх рядках були однакові, а також, щоб суми чисел в усіх стовпчиках були однакові, але, можливо, відмінні від сум чисел у рядках?
б) Чи можна розставити у комірках таблиці 4×5 числа 1, 2, ..., 20 таким чином, щоб суми чисел в усіх рядках були однакові, а також, щоб суми чисел в усіх стовпчиках були однакові, але, можливо, відмінні від сум чисел у рядках?

(Рубльов Богдан)

4. Розв’яжіть у натуральних числах x, y, z систему рівнянь:

$$\begin{cases} 2x^2=4y^2+3z^2+2, \\ 13x=4y+3z+29. \end{cases}$$

(Гоголєв Андрій)

5. Нехай a, b, c – сторони гострокутного трикутника. Доведіть, що

$$\sqrt{a^2+b^2-c^2}+\sqrt{b^2+c^2-a^2}+\sqrt{c^2+a^2-b^2}\le\sqrt{3(ab+bc+ca)}.$$

(Сердюк Назар)

4.1. Знайдіть усі такі натуральні n, для яких числа $12n-119$ та $75n-539$ є точними квадратами натуральних чисел.

5.1. Дійсні числа a, b задовольняють умову: $a^{2014}+b^{2014}=a^{2016}+b^{2016}$. Доведіть, що справджується нерівність: $a^2+b^2\le 2$.

10 клас

1. Розв’яжіть нерівність:

$$\frac{(x+1)^4}{(x-1)^3}+\frac{x-1}{16}\ge\frac{(x+1)^2}{2(x-1)}.$$

(Анікушин Андрій)

2. Чи існують четвірки дійсних чисел a,b,c,d, що задовольняють умови:

$$a+b+c=d \text{ та } \tfrac{1}{ab}+\tfrac{1}{ac}+\tfrac{1}{bc}=\tfrac{1}{ad}+\tfrac{1}{bd}+\tfrac{1}{cd}.$$

(Рубльов Богдан)

3. Задача № 4 за 9 клас.

4. У гострокутному трикутнику ABC проведені висоти AA_1, BB_1 та CC_1. З вершини A на пряму A_1B_1 опущено перпендикуляр AK, а з вершини B опущено перпендикуляр BL на пряму C_1B_1. Доведіть, що $A_1K=B_1L$.

(Рожкова Марія)

5. Є опуклий 11–кутник. Його діагоналі пофарбовані у декілька кольорів. Два кольори називаються такими, що перетинаються, якщо існують два відрізки, що пофарбовані у ці кольори і які перетинаються у деякій внутрішній точці цих відрізків. Яка найбільша кількість різних кольорів може бути використана, щоб кожні два використані кольори були такими, що перетинаються.

(Рубльов Богдан)

4.1. У трикутнику ABC сторона $AC=\frac{1}{2}(AB+BC)$, BL – бісектриса $\angle ABC$, K, M – середини сторін AB і BC відповідно. Знайдіть величину $\angle KLM$, якщо $\angle ABC=\beta$.

5.1. На дошці записаний вираз **...*, що складається з непарної кількості зірочок. Андрій та Олеся грають у таку гру: вони по черзі (Андрій перший) замінюють будь-яку ще не замінену зірочку будь-якою цифрою (на перше місце не можна ставити цифру 0). Якщо в решті вийде число, що кратне 11, то перемагає Андрій, якщо ні, то – Олеся. Хто переможе при правильній грі?

11 клас

1. Знайдіть усі розв’язки рівняння $2^{\sin x} = \sin 2^x$ на проміжку $[0; \pi)$.

2. ***а)*** Відомо, що у нескінченній арифметичній прогресії натуральних чисел є деякий член, який є k–м степенем натурального числа, більшого від 1. Доведіть, що серед членів прогресії є нескінченна кількість таких, що також є k–ми степенями натуральних чисел.
б) Чи існує нескінченна зростаюча арифметична прогресія натуральних чисел жоден член якої не є степенем натурального числа більше першої?

(Рубльов Богдан)

3. Задача № 5 за 9 клас.

4. У трикутнику ABC, для якого $AC < AB < BC$, на сторонах AB та BC вибрали точки K та N відповідно таким чином, що $KA = AC = CN$. Прямі AN та CK перетинаються в точці O. З точки O провели відрізок $OM \perp AC$ $(M \in AC)$. Доведіть, що кола, які вписані у трикутники ABM та CBM, дотикаються одне одного.

(Нагель Ігор)

5. Задача № 5 за 10 клас.

4.1. Побудуємо для трикутника ABC коло S, що проходить через точку B і дотикається до прямої CA у точці A, коло T, що проходить через точку C і дотикається до прямої BA у точці A. Другу точку перетину кіл S та T позначимо через D. Точку перетину прямої AD та описаного кола ΔABC позначимо через E. Доведіть, що D – середина відрізку AE.

5.1. Задача № 5.1 за 10 клас.