

Міністерство освіти і науки України
Інститут інноваційних технологій і змісту освіти
LIII Всеукраїнська учнівська олімпіада з математики

IV етап

Розв'язання та відповіді

Перший день

8.1. Для невід'ємних чисел x і y має місце рівність $|\sqrt{y} - \sqrt{x}| = \sqrt{2xy + \frac{1}{2}}$. Яких значень може набувати вираз $\sqrt{x+y} - \sqrt{2xy}$?

Розв'язання. Для $x \geq 0$, $y \geq 0$ $|\sqrt{y} - \sqrt{x}| = \sqrt{2xy + \frac{1}{2}} \Leftrightarrow x + y = 2xy + 2\sqrt{xy} + \frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow x + y = 2\left(\sqrt{xy} + \frac{1}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \sqrt{x+y} = \sqrt{2xy} + \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Відповідь: $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Зауваження. Невід'ємні числа x і y , що задовольняють умову, насправді існують.

8.2. Чи можливо виписати в рядок усі натуральні числа від 1 до 24 так, щоб можна було вибрати щонайбільше чотири числа (не обов'язково розташованих поспіль), які стоять у цьому рядку в порядку зростання, та щонайбільше шість чисел (також не обов'язково розташованих поспіль), які стоять у цьому рядку в порядку спадання?

Розв'язання. Покажемо, що це можливо:

6, 5, 4, 3, 2, 1, 12, 11, 10, 9, 8, 7, 18, 17, 16, 15, 14, 13, 24, 23, 22, 21, 20, 19.

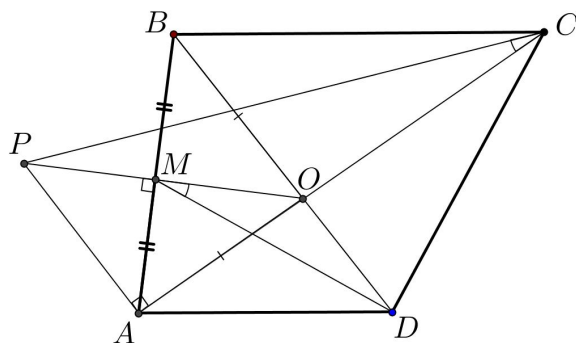
Відповідь: так, можна.

8.3. Відомо, що для натуральних k , m , n і q виконується рівність $2(k^2 + km) + m^2 + n^2 = 2013^q$, причому числа k і m — взаємно прості. Доведіть, що числа n і $k^2 + km$ не є взаємно простими.

Розв'язання. Маємо рівність $k^2 + (k + m)^2 + n^2 = 2013^q$. Оскільки $(k; m) = 1^1$, то $(k; k + m) = 1$. Припустимо, що n і $k^2 + km$ — взаємно прості числа. Тоді $(n; k) = 1$ і $(n; k + m) = 1$. Отже, серед чисел k , $k + m$ і n не більше за одне парне. І тому $k^2 + (k + m)^2 + n^2 \equiv 2 \pmod{4}$ чи $k^2 + (k + m)^2 + n^2 \equiv 3 \pmod{4}$. Але ж $2013^q \equiv 1 \pmod{4}$, і одержуємо суперечність.

Зауваження. Для $k = 10$, $m = 33$, $n = 8$ маємо: $10^2 + (10 + 33)^2 + 8^2 = 2013$.

8.4. Нехай M — середина бічної сторони AB трапеції $ABCD$, O — точка перетину її діагоналей, причому $AO = BO$. На півпрямій OM позначили таку точку P , що $\angle PAC = 90^\circ$. Доведіть, що $\angle AMD = \angle APC$.



Розв'язання. Трикутники AOD і COB подібні, і тому $\frac{OC}{OA} = \frac{OB}{OD}$. Оскільки

AM — висота, проведена до гіпотенузи прямокутного трикутника APO , то маємо: $OC \cdot OD = OA \cdot OB = OA^2 = OM \cdot OP$. Отже, $\frac{OC}{OM} = \frac{OP}{OD}$. Півпряма OM — бісектриса кута AOB , і $\angle MOD = \angle COP$. Звідси впливає подібність трикутників OCP і OMD . Відтак, $\angle OCP = \angle OMD$, $90^\circ - \angle OCP = 90^\circ - \angle OMD$, тобто $\angle APC = \angle AMD$.

9.1. Для кожного дійсного невід'ємного значення параметра a визначте кількість дійсних розв'язків рівняння $\sqrt{ax} - x = \sqrt{a} - 1$.

Розв'язання. Для $a = 0$ єдиним розв'язком є $x = 1$. Нехай тепер $a > 0$. Тоді слід розглядати тільки $x \geq 0$. Зауважимо, що $x = 1$ є розв'язком для кожного $a > 0$. Нехай $x \neq 1$. Маємо:

$$\begin{cases} \sqrt{ax} - x = \sqrt{a} - 1, \\ x \neq 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{a}\sqrt{x} - x = \sqrt{a} - 1, \\ x \neq 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{a}(\sqrt{x} - 1) = x - 1, \\ x \neq 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{a} = \sqrt{x} + 1, \\ x \neq 1. \end{cases}$$

¹ Символом $(a; b)$ позначено найбільший спільний дільник натуральних чисел a і b .

Відповідь: якщо $a \in [0; 1) \cup \{4\}$, то рівняння має єдиний розв'язок $x = 1$; якщо $a \in [1; 4) \cup (4; +\infty)$, то рівняння має два розв'язки $x = (\sqrt{a} - 1)^2$ і $x = 1$.

9.2. Знайдіть усі такі пари натуральних чисел m і n , для яких $\frac{(m + 3n)^2}{m^2 + n^2}$ є квадратом натурального числа.

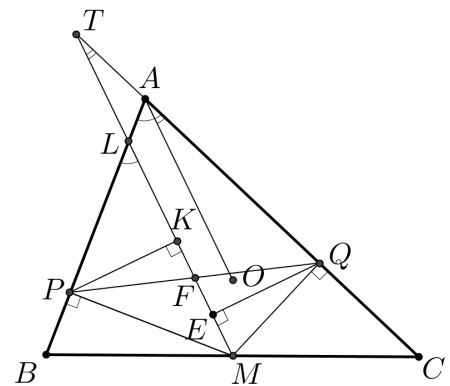
Розв'язання. Нехай m і n такі натуральні числа, що $\frac{(m + 3n)^2}{m^2 + n^2} = k^2$, де $k \in \mathbf{N}$, $k > 1$ (ми врахували, що $(m + 3n)^2 > m^2 + n^2$). Тоді

$$(k^2 - 1)m^2 - 6nm + (k^2 - 9)n^2 = 0.$$

Розглядаючи цю рівність як квадратне рівняння відносно m , для його дискримінанта одержуємо, що $4n^2(9 - (k^2 - 1)(k^2 - 9))$ є квадратом цілого числа. Для $k \geq 4$ $(k^2 - 1)(k^2 - 9) > 9$. Для $k = 2$ число $4n^2(9 - (k^2 - 1)(k^2 - 9)) = 96n^2$ не є точним квадратом. Залишається розглянути випадок $k = 3$. Маємо, як неважко бачити, рівність $4m = 3n$. Звідки $m = 3l$, $n = 4l$, де $l \in \mathbf{N}$.

Відповідь: $m = 3l$, $n = 4l$, де $l \in \mathbf{N}$ — довільне.

9.3. Нехай M — середина сторони BC гострокутного трикутника ABC , в якому $AB \neq AC$, O — центр його описаного кола. Проведемо з точки M перпендикуляри MP і MQ до сторін AB і AC відповідно. Доведіть, що пряма, яка проходить через середину відрізка PQ і точку M , є паралельною прямій AO .



Розв'язання. Без обмеження загальності вважаємо, що $AB < AC$. Нехай F — така точка відрізка PQ , що $FM \parallel AO$. Покажемо, що F — середина відрізка PQ . Проведемо з точок P і Q перпендикуляри PK і QE до прямої MF . Доведемо рівність $PK = QE$, з якої і випливатиме потрібний факт.

Позначимо через L і T точки перетину прямої MF з прямими AB і AC відповідно. Тоді

$$\angle BLM = \angle BAO = 90^\circ - \angle C, \quad \angle CTM = \angle CAO = 90^\circ - \angle B.$$

З відповідних прямокутних трикутників маємо:

$$PM = \frac{1}{2} BC \sin \angle B,$$

$$PK = PM \sin \angle PML = PM \cos \angle BLM = PM \sin \angle C = \frac{1}{2} BC \sin \angle B \sin \angle C.$$

Аналогічно,

$$QM = \frac{1}{2} BC \sin \angle C,$$

$$QE = QM \sin \angle QMT = QM \cos \angle CTM = QM \sin \angle B = \frac{1}{2} BC \sin \angle C \sin \angle B.$$

Отже, $PK = QE$, що й треба було довести.

9.4. Нехай $m \geq 35$ — задане натуральне число. Відомо, що в суді племені Мумбо-Юмбо працює m суддів. Для прискореного розгляду справ Верховний шаман племені вирішив утворити суддівські трійки так, щоб кожні дві трійки мали хоча б одного спільного суддю. Яку найбільшу кількість суддівських трійок може утворити Верховний шаман?

Розв'язання. Візьмемо одного із суддів. Якщо утворити всі можливі трійки з m суддів так, щоб до складу кожної з них входив цей суддя, то всі утворені суддівські трійки задовольнятимуть умову задачі, причому їх буде рівно

$$C_{m-1}^2 = \frac{(m-1)(m-2)}{2}.$$

Доведемо, що більшої кількості суддівських трійок отримати неможливо. Припустимо, що з дотриманням умови задачі утворилося N суддівських трійок, причому $N \geq C_{m-1}^2 + 1$. Нехай одна з таких трійок — назовемо її *основною* — складається із суддів A_0, A_1 і A_2 . Через $M(A_0), M(A_1), M(A_2)$ позначимо множини всіх суддівських трійок (за винятком основної), до складу яких входять судді A_0, A_1, A_2 відповідно (дані множини можуть мати й спільні трійки).

За припущенням, будь-яка з $N - 1$ неосновних суддівських трійок повинна належати одній з цих множин. Тоді, за принципом Діріхле, хоча б одна з множин $M(A_0), M(A_1), M(A_2)$ містить не менше за $\frac{N-1}{3}$ суддівських трійок, причому

$$\frac{N-1}{3} \geq \frac{(m-1)(m-2)}{6}.$$

Нехай, для визначеності, це буде множина $M(A_0)$.

У ній знайдеться менше, ніж $2(m-2)$ суддівських трійок, до складу яких одночасно із суддею A_0 входять або суддя A_1 , або суддя A_2 . Оскільки

$$2(m-2) < \frac{(m-1)(m-2)}{6},$$

то в множині $M(A_0)$ знайдеться така суддівська

трійка $A_0 A_3 A_4$, що $A_3 \notin \{A_1, A_2\}$ і $A_4 \notin \{A_1, A_2\}$. Аналогічно, у множині $M(A_0)$ існує менше, ніж $4(m-2)$ трійок, до складу яких одночасно із суддею

A_0 входить принаймні один із суддів A_i , $1 \leq i \leq 4$. Оскільки $4(m-2) < \frac{(m-1)(m-2)}{6}$, то в множині $M(A_0)$ знайдеться така суддівська трійка $A_0A_5A_6$, що $A_5 \notin \{A_i \mid 1 \leq i \leq 4\}$ і $A_6 \notin \{A_i \mid 1 \leq i \leq 4\}$. Урешті-решт покажемо, що в множині $M(A_0)$ знайдеться суддівська трійка $A_0A_7A_8$, у якій $A_7 \notin \{A_i \mid 1 \leq i \leq 6\}$, $A_8 \notin \{A_i \mid 1 \leq i \leq 6\}$. Для цього нам знадобиться більш точна оцінка кількості неосновних трійок, до складу яких одночасно із суддею A_0 входить хоча б один із суддів A_i , $1 \leq i \leq 6$. У добутку $6(m-2)$ кожна із C_6^2 суддівських трійок вигляду $A_0A_iA_j$, $1 \leq i \neq j \leq 6$, враховується двічі, до того ж, основну трійку $A_0A_1A_2$ слід узагалі виключити з розгляду. Отже, у множині $M(A_0)$ існує не більше, ніж $6(m-2) - C_6^2 - 1 = 6m - 28$ потрібних нам трійок. Оскільки $6m - 28 < \frac{(m-1)(m-2)}{6}$ для $m \geq 35$, то й маємо потрібний результат.

Далі, за умовою задачі будь-яка із N утворених суддівських трійок має хоча б одного спільного суддю з кожною з чотирьох суддівських трійок $A_0A_1A_2$, $A_0A_3A_4$, $A_0A_5A_6$ і $A_0A_7A_8$. Зрозуміло, що одним із спільних членів таких трійок мусить бути суддя A_0 , бо якщо він не входить до деякої суддівської трійки, то до її складу повинні входити хоча б по одному судді з кожної з множин $\{A_1, A_2\}$, $\{A_3, A_4\}$, $\{A_5, A_6\}$, $\{A_7, A_8\}$, що неможливо. Отже, усі утворені суддівські трійки мають спільного суддю A_0 , а це означає, що $N \leq C_{m-1}^2$. Дістали суперечність.

Відповідь: $C_{m-1}^2 = \frac{(m-1)(m-2)}{2}$.

10.1. Для дійсних чисел x , y , z і t виконуються рівності

$$\{x + y + z\} = \{y + z + t\} = \{z + t + x\} = \{t + x + y\} = \frac{1}{4}.$$

Знайдіть усі можливі значення виразу $\{x + y + z + t\}$. (Тут $\{a\} = a - [a]$, а $[a]$ — ціла частина числа a , тобто найбільше ціле число, яке не перевищує a .)

Розв'язання. Із умови задачі випливає, що

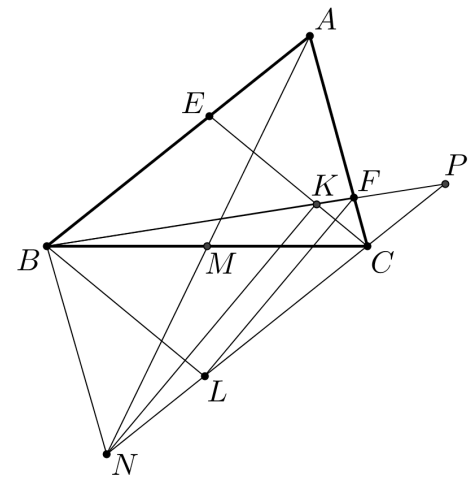
$$\begin{aligned} x + y + z &= [x + y + z] + \frac{1}{4}, & y + z + t &= [y + z + t] + \frac{1}{4}, \\ z + t + x &= [z + t + x] + \frac{1}{4}, & t + x + y &= [t + x + y] + \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Отже, $3(x + y + z + t) = [x + y + z] + [y + z + t] + [z + t + x] + [t + x + y] + 1$. Це означає, що $3(x + y + z + t)$ — ціле число, тобто дробова частина числа $x + y + z + t$ дорівнює $0, \frac{1}{3}$ або $\frac{2}{3}$.

Усі ці значення досягаються. Для того, щоб у цьому переконатись, розглянемо випадки $x = y = z = t = \frac{3}{4}$, $x = y = z = t = \frac{1}{12}$, $x = y = z = t = \frac{5}{12}$.

Відповідь: $0; \frac{1}{3}; \frac{2}{3}$.

10.2. Нехай M — середина сторони BC трикутника ABC . На його сторонах AB і AC позначили відмінні від вершин довільні точки E і F відповідно. Нехай K — точка перетину прямих BF і CE , L — така точка, що $CL \parallel AB$ і $BL \parallel CE$, а N — точка перетину прямих AM і CL . Доведіть, що $KN \parallel FL$.



Розв'язання. Чотирикутник $BECL$ — паралелограм. Позаяк $AB \parallel CN$, а точка M — середина відрізка BC , то $ABNC$ також є паралелограмом,

і тому $AE = NL$. Нехай P — точка перетину прямих BF і CN . Оскільки $FC \parallel BN$, то трикутники PBN і PFC подібні. Звідки $\frac{PF}{PB} = \frac{PC}{PN}$, тобто

$PF = \frac{PB \cdot PC}{PN}$. Оскільки $PC \parallel BE$, то подібними будуть трикутники PCK і

BEK . Маємо: $\frac{PK}{BK} = \frac{PC}{BE}$, $PK = \frac{BK \cdot PC}{BE}$. Отже, $\frac{PF}{PK} = \frac{PB \cdot BE}{BK \cdot PN}$. Оскільки три-

кутники BLP і KEB подібні, то $\frac{PL}{PB} = \frac{BE}{BK}$, і $\frac{PL}{PN} = \frac{PB \cdot BE}{BK \cdot PN}$. Тепер ми маємо

пропорцію $\frac{PF}{PK} = \frac{PL}{PN}$, з якої, у свою чергу, випливає подібність трикутників

PFL і PKN . Відтак, $\angle PFL = \angle PKN$, і тому $KN \parallel FL$, що й треба було довести.

10.3. Відомо, що для натуральних чисел a, b, c, d і n виконуються нерівності $a + c < n$ і $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} < 1$. Доведіть, що $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} < 1 - \frac{1}{n^3}$.

Розв'язання. Оскільки $n > a + c \geq 2$, то $n \geq 3$. До того ж, $a < b$ і $c < d$, адже

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} < 1.$$

Розглянемо такі випадки.

а) Нехай $b \geq n$ і $d \geq n$, тоді $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} \leq \frac{a}{n} + \frac{c}{n} = \frac{a+c}{n} \leq \frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n} < 1 - \frac{1}{n^3}$.

б) Нехай $b \leq n$ і $d \leq n$, тоді з нерівності $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} < 1$ випливає, що $ad + bc < bd$,

тобто $ad + bc + 1 \leq bd$. Звідси $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} \leq 1 - \frac{1}{bd} \leq 1 - \frac{1}{n^2} < 1 - \frac{1}{n^3}$.

в) Нехай $b < n < d$. Якщо $d \leq n^2$, то $bd < n^3$, і тоді $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} \leq 1 - \frac{1}{bd} < 1 - \frac{1}{n^3}$. Якщо

$d > n^2$, то $\frac{c}{d} \leq \frac{n-2}{n^2} = \frac{1}{n} - \frac{2}{n^2}$, оскільки $c < n - a \leq n - 1$, тобто $c \leq n - 2$. Припус-

тимо, що $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} \geq 1 - \frac{1}{n^3}$. Тоді $1 - \frac{a}{b} \leq \frac{c}{d} + \frac{1}{n^3} \leq \frac{1}{n} - \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^3} < \frac{1}{n}$. Звідси випливає,

що $b > n(b - a) \geq n$ (тут ми врахували, що $a < b$), що суперечить нерівності $b < n < d$.

г) Нехай $d < n < b$. Якщо $b \leq n^2$, то $bd < n^3$, і тоді $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} \leq 1 - \frac{1}{bd} < 1 - \frac{1}{n^3}$. Якщо

$b > n^2$, то $\frac{a}{b} \leq \frac{n-2}{n^2} = \frac{1}{n} - \frac{2}{n^2}$, оскільки $a < n - c \leq n - 1$, тобто $a \leq n - 2$. Припус-

тимо, що $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} \geq 1 - \frac{1}{n^3}$. Тоді $1 - \frac{c}{d} \leq \frac{a}{b} + \frac{1}{n^3} \leq \frac{1}{n} - \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^3} < \frac{1}{n}$. Позаяк $c < d$,

маємо: $d > n(d - c) \geq n$. Одержали суперечність з нерівністю $d < n < b$.

Отже, нерівність $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} < 1 - \frac{1}{n^3}$ виконується в усіх випадках, що й треба було

довести.

10.4. На столі лежать 100 карток, які пронумеровані натуральними числами від 1 до 100. Андрійко й Миколка вибрали собі однакову кількість карток так, що якщо картка з номером n є в Андрійка, то в Миколки є картка з номером $2n + 2$. Яка максимальна кількість карток могла бути в обох хлопчиків?

Розв'язання. Спочатку доведемо, що кількість карток у обох хлопчиків не перевищує 66, тобто кількість карток у кожного не перевищує 33.

Оскільки $2n + 2 \leq 100$, то $2n \leq 98$, тобто $n \leq 49$. Це означає, що номери карток Андрійка належать множині $\{1, 2, 3, \dots, 49\}$. Розіб'ємо цю множину на такі

групи підмножин: $\{1, 4\}, \{3, 8\}, \{5, 12\}, \dots, \{23, 48\}$ (12 підмножин); $\{2, 6\}, \{10, 22\}, \{14, 30\}, \{18, 38\}$ (4 підмножини); $\{25\}, \{27\}, \{29\}, \dots, \{49\}$ (13 підмножин); $\{26\}, \{34\}, \{42\}, \{46\}$ (4 підмножини). Усього $12 + 4 + 13 + 4 = 33$ підмножини. Будь-які дві з цих підмножин не мають спільних елементів. Якщо в Андрійка буде щонайменше 34 картки, то за принципом Діріхле номери якихось двох з них будуть елементами однієї із вказаних вище двоелементних підмножин. Але оскільки кожна така двоелементна підмножина має вигляд $\{n, 2n + 2\}$, то одержуємо суперечність з умовою задачі.

Приклад для множини A номерів 33 карток Андрійка може бути таким:

$$A = \{1, 3, 5, \dots, 23, 2, 10, 14, 18, 25, 27, 29, \dots, 49, 26, 34, 42, 46\}.$$

Тоді номери карток Миколки утворюватимуть множину $M = \{2n + 2 \mid n \in A\}$.

Відповідь: 66 карток.

11.1. Для кожного дійсного значення параметра a визначте кількість дійсних розв'язків рівняння $\sqrt{ax} + \sqrt[3]{x} = x^{2013}$.

Розв'язання. Зрозуміло, що $x \geq 0$. Для будь-якого $a \in \mathbf{R}$ $x = 0$ є розв'язком даного рівняння. Будемо далі розглядати $x > 0$ і запишемо наше рівняння в рівносильному вигляді $a = x^{4025} - \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$.

На проміжку $(0; +\infty)$ функція $f(x) = x^{4025} - \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$ є неперервною та строго зростаючою. До того ж, $\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = -\infty$ і $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Отже, функція f на проміжку $(0; +\infty)$ набуває кожного дійсного значення, причому — рівно один раз.

Відповідь: рівняння має два розв'язки для будь-якого дійсного значення a .

11.2. Див. задачу 10.2.

11.3. Знайдіть усі функції $f: \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}$, які задовольняють такі дві умови:

а) $f(x) \neq f(y)$ для будь-яких цілих x і y таких, що $x \neq y$;

б) $f(f(x)y + x) = f(x)f(y) + f(x)$ для всіх $x \in \mathbf{Z}$ і $y \in \mathbf{Z}$.

Розв'язання. Візьмемо $x = y = 0$. Знаходимо, що $f(0) = 0$. Нехай $x_0 \neq 0$ і позначимо $a = f(x_0)$, $a \neq 0$. Підставимо до вихідного співвідношення $x = x_0$. Тоді

для всіх $y \in \mathbf{Z}$ маємо $f(ay + x_0) = af(y) + a$. Тепер підставимо до вихідного співвідношення замість x вираз $ax + x_0$. Одержуємо:

$$\begin{aligned} f(f(ax + x_0)y + ax + x_0) &= f(ax + x_0)f(y) + f(ax + x_0), \\ f((af(x) + a)y + ax + x_0) &= (af(x) + a)f(y) + af(x) + a, \\ f(af(x)y + ay + ax + x_0) &= af(x)f(y) + af(y) + af(x) + a. \end{aligned}$$

Оскільки до правої частини x і y входять симетрично, то $f(af(x)y + ay + ax + x_0) = f(af(y)x + ax + ay + x_0)$ для всіх $x \in \mathbf{Z}$ і $y \in \mathbf{Z}$.

З урахуванням умови задачі, $af(x)y + ay + ax + x_0 = af(y)x + ax + ay + x_0$, тобто для всіх $x \in \mathbf{Z}$ і $y \in \mathbf{Z}$ $f(x)y = f(y)x$. Зафіксуємо довільне $y = y_0$, $y_0 \neq 0$, і

позначимо $k = \frac{f(y_0)}{y_0}$, $k \neq 0$. Тоді $f(x) = kx$, $k \in \mathbf{Q} \setminus \{0\}$. Оскільки $f(x)$ є ці-

лим числом для кожного цілого x , то легко встановити, що $k \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$. Залишається перевірити, що всі функції вигляду $f(x) = kx$, $k \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$, задовольняють умову задачі.

Відповідь: $f(x) = kx$, $x \in \mathbf{Z}$, де $k \neq 0$ — довільне ціле число.

11.4. Нехай задано натуральне число $n \geq 2$ і додатні дійсні числа l_1, l_2, \dots, l_n . Труби з довжинами l_1, l_2, \dots, l_n лежать у вказаному порядку в ряд. Зварювальник може зварити разом будь-які дві сусідні труби довжинами x та y , утворивши трубу довжиною $x + y$, і за це він бере плату $(x + y)^3$. (Наприклад, якщо зварити другу й третю труби, а потім — отриману трубу з першою, то плати за ці зварювання дорівнюватимуть $(l_2 + l_3)^3$ та $(l_1 + l_2 + l_3)^3$ відповідно.) Порядок, у якому лежать труби, змінювати не можна. Доведіть, що якими б не були початкові довжини труб, існує така послідовність зварювань, що всі труби будуть зварені разом і сумарна плата за це буде меншою, ніж $2(l_1 + l_2 + \dots + l_n)^3$.

Розв'язання. Оберемо наступну стратегію. На кожному кроці проситимемо зварювальника зварити дві сусідні труби, сумарна довжина яких найменша серед усіх пар сусідніх труб. Якщо є декілька таких пар, можна обрати будь-яку з них. Доведемо індукцією за n , що сумарна плата S при зварюванні за такою стратегією менша, ніж $2l^3$, де $l = l_1 + l_2 + \dots + l_n$.

База індукції очевидна: для $n = 2$ плата $(l_1 + l_2)^3$ менша за $2(l_1 + l_2)^3$.

Нехай $n > 2$. Розглянемо шматки A і B , які були зварені на останньому кроці. Нехай їхні довжини дорівнюють a і b відповідно, $l = a + b$. Без обмеження загальності вважаємо, що A лежить ліворуч від B , $a \leq b$. Розглянемо процеси зварювання цих шматків окремо один від одного. Оскільки на кожному кроці сумарна довжина зварюваних труб найменша серед усіх пар сусідніх труб, то вона є найменшою й серед сусідніх пар труб, що входять до цього шматка. Тобто шматки A і B теж утворюються за вказаною вище стратегією, отже, сумарні плати за їхнє створення менші за $2a^3$ та $2b^3$ відповідно.

Розглянемо два випадки.

Перший випадок: $a \geq \frac{l}{4}$. Сумарна плата S менша, ніж сума плат за утворення

A і B та плати за зварення їх разом, тобто $S < 2a^3 + 2b^3 + (a + b)^3$. Доведемо

нерівність $2a^3 + 2b^3 + (a + b)^3 < 2l^3 = 2(a + b)^3$, тобто $t^3 + (1 - t)^3 < \frac{1}{2}$,

$6t^2 - 6t + 1 < 0$, де $t = \frac{a}{a + b}$, $t \in \left[\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right]$. Неважко переконатися, що на вказаному

відрізку остання нерівність виконується.

Другий випадок: $a < \frac{l}{4}$. Якщо шматок B не є звареним з менших шматків, то

сумарна плата менша за $2a^3 + l^3 < 2\left(\frac{l}{4}\right)^3 + l^3 < 2l^3$. В іншому випадку розгля-

немо крок, на якому було отримано шматок B . Нехай його було отримано зварюванням шматків C і D довжинами c і d відповідно, причому C лежав ліворуч від D . Тоді $d \leq a$ (якщо $d > a$, то $c + d > a + c$, і ми не могли б зварювати C і D — у тому числі, зрозуміло, і в ситуації, коли шматок A ще не утворився). Доведемо, що шматок C не може бути звареним з менших шматків. Припустимо супротивне: нехай C був утворений на деякому кроці зі шматків E і F довжинами e і f відповідно, причому E лежав ліворуч від F . Тоді

$e + f \leq f + d$ і $e + f \leq a + e$, тому $c = e + f \leq d + a \leq 2a < \frac{l}{2}$ (якщо, скажімо,

шматок D ще не утворився, то беремо найлівішу на цей момент з утворених його частин D' довжиною d' і одержуємо, що $e + f \leq f + d' < f + d$; аналогічно міркуємо і якщо шматок A ще не утворився). Звідси

$l = a + b = a + c + d < 2a + \frac{l}{2} < l$, і дістаємо суперечність. Отже, шматок C існу-

вав із самого початку, і його отримання не потребує плати. Маємо:

$$S < 2a^3 + 2d^3 + (c + d)^3 + l^3 \leq 2a^3 + 2a^3 + (l - a)^3 + l^3 = l^3(3t^3 + 3t^2 - 3t + 2),$$

де $t = \frac{a}{l} \in \left(0; \frac{1}{4}\right)$. Оскільки $3t^3 + 3t^2 - 3t + 2 < \frac{3t}{16} + \frac{3t}{4} - 3t + 2 < 2 - t < 2$, і тому $S < 2l^3$.

Задачі запропонували:

- | | | | |
|------------|--|-------------|------------------|
| 8.1 | В. О. Швець | 10.1 | В. А. Ясінський |
| 8.2 | О. Б. Панасенко | 10.2 | В. А. Ясінський |
| 8.3 | І. М. Мітельман | 10.3 | В. А. Ясінський |
| 8.4 | В. А. Ясінський | 10.4 | В. А. Ясінський |
| 9.1 | І. М. Мітельман | 11.1 | І. М. Мітельман |
| 9.2 | В. А. Ясінський | 11.2 | Див. задачу 10.2 |
| 9.3 | В. А. Ясінський | 11.3 | І. М. Мітельман |
| 9.4 | І. М. Мітельман, Д. С. Скороходов, В. А. Ясінський | 11.4 | О. В. Рибак |