Міністерство освіти і науки України
Інститут інноваційних технологій та змісту освіти

L Всеукраїнська олімпіада 2009-2010 років
Умови та розв'язки по усіх класах

Перший день

8 клас

1. (**Ясінський В'ячеслав**) При яких натуральних n значення кожного з виразів $n^2-10n+23$, $n^2-9n+31$ і $n^2-12n+46$ є простим числом.

   Відповідь: $n=3$, $n=7$.

   Розв'язання. Нехай n таке натуральне число, що задовольняє умову задачі. Знайдемо суму усіх чисел: $3n^2-31n+100=2n^2-30n+n(n-1)+100$ – парне число. Це означає, що усі ці три числа не можуть бути непарними. Тому хоча б одне із них буде парним, тобто дорівнює 2. Розв'язавши кожне з трьох рівнянь:

   $$n^2-10n+23=2, n^2-9n+31=2, n^2-12n+46=2,$$

   ми знаходимо, що $n=3$ або $n=7$. Залишилося перевірити ці значення.

   При $n=3$ маємо: $n^2-10n+23=2$, $n^2-9n+31=13$ та $n^2-12n+46=19$.

   При $n=7$ маємо: $n^2-10n+23=2$, $n^2-9n+31=17$ та $n^2-12n+46=11$.

   Як бачимо усі одержані значення – прості. Отже, умова задачі виконується лише для $n=3$, $n=7$.

2. (**Рубльов Богдан**) В рядок записали $n\geq 5$ дійсних чисел. З'ясувалось, що сума будь-яких трьох записаних поспіль чисел – додатне число, а сума будь-яких 5 записаних поспіль чисел є від'ємним числом. При якому найбільшому значенні n це можливо?

   Відповідь: $n=6$.

   Розв'язання. Наведемо відповідний приклад для $n=6$: $3,-5,3,3,-5,3$.

   Припустимо, що існують вказані числа для деякого $n\geq 7$, виберемо довільні 5 чисел a,b,c,d,e, які стоять поруч. Оскільки за умовою $a+b+c>0$, $c+d+e>0 \Rightarrow (a+b+c+d+e)+c>0$, а також $a+b+c+d+e<0$. Звідси очевидно, що $c>0$, тому серед 5 чисел, які стоять поруч середнє завжди повинно бути додатним. За таких умов усі числа окрім 2 крайніх з кожного краю є середніми у деякій п'ятірці, тому вони усі повинні бути додатними.

   Тепер розглянемо 6 поруч записаних чисел: a,b,c,d,e,f. Тоді за умовою $a+b+c+d+e<0$, а $(a+b+c)+(d+e+f)>0$. Таким чином $f>0$, аналогічно $a>0$, тобто крайні числа у кожній шістці повинні також бути додатними. Остаточно маємо, що усі n чисел повинні бути додатними. Що очевидно, умову задачі не задовольняє. Одержана суперечність завершує доведення.

3. (**Білокопитов Євген**) Точка P належить трикутнику ABC. Центри описаних кіл трикутників PBC, PAC, PAB позначимо через O_A, O_B, O_C відповідно. Позначимо через O_P – центр описаного кола трикутника $O_AO_BO_C$. Доведіть, що точка P задовольняє умову $O_P=P$ тоді і тільки тоді, коли P – ортоцентр $\triangle ABC$.

Розв'язання. Нехай $A' = PA \cap O_B O_C, B' = PB \cap O_A O_C, C' = PC \cap O_B O_A$, $O_A O_C$ є серединним перпендикуляром до BP, тому містить точку B' – середину відрізку BP. Аналогічно, A', C' є серединами PA, PC (рис.1). Якщо P є центром описанного кола $\triangle O_A O_B O_C$ то перпендикуляр, опущений з P на $O_A O_C$ є серединним, отже B', як основа цього перпендикуляру є також серединою $O_A O_C$. Аналогічно, в цьому випадку, A', C' є серединами $O_B O_C, O_A O_B$. При цьому $PB \perp O_A O_C \parallel A'C' \parallel AC$, бо $A'C'$ є середньою лінією трикутників $O_A O_B O_C$ та APC. Аналогічно $PA \perp BC$, $PC \perp AB$, отже P – ортоцентр $\triangle ABC$. Очевидно також, що якщо P – ортоцентр, то $O_P = P$.

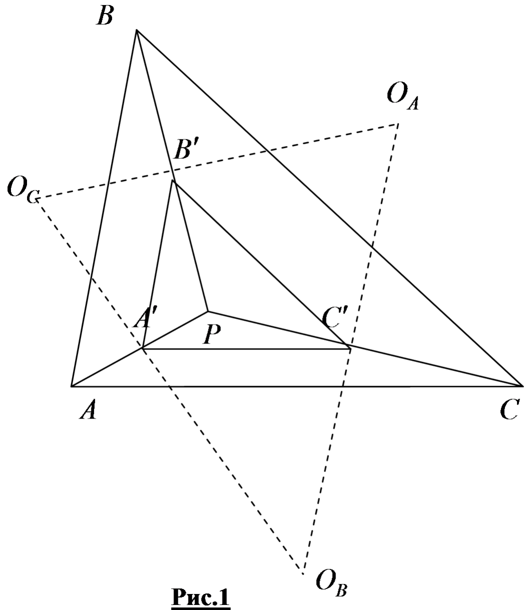

Рис.1

4. (**Гоголєв Андрій**) Розв'яжіть в натуральних числах n, k рівняння:

$$(n+1)^n = 2n^k + 3n + 1.$$

Відповідь: $n = k = 3$.

Розв'язання. Перепишемо рівняння у вигляді $2n^k + 3n = (n+1)^n - 1$. Розкладемо праву частину на множники і отримаємо:

$$2n^k + 3n = (n+1)^n - 1 = (n+1-1)\left((n+1)^{n-1} + (n+1)^{n-2} + \ldots + (n+1) + 1\right).$$

Права частина ділиться на n^2 оскільки перший множник дорівнює n, а другий має n доданків, кожний з яких дає остачу 1 при діленні на n, тобто також ділиться на n. Отже $\left(2n^{k-1} + 3\right) \vdots\, n$. Можливі два випадки.

1) $k = 1$, тому $5 \vdots\, n$, тому треба розглянути випадки $n = 1$ та $n = 5$. При $n = 1$ маємо $2 = 6$ – суперечність. При $n = 5$ маємо $6^5 = 31$ – також суперечність.

2) $k > 1$, тоді повинна виконуватись умова $3 \vdots\, n$. Знову треба розглянути два випадки $n = 1$ та $n = 3$. При $n = 1$ маємо $2 = 6$ – суперечність. При $n = 3$ маємо $64 = 2 \cdot 3^k + 10$, звідки знаходимо, що $k = 3$.

Таким чином знаходимо розв'язок $n = k = 3$.

9 клас

1. (**Рубльов Богдан**) Числа $a_1 = 1, a_2 = 1 - \frac{1}{2}, a_3 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}, a_4 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}, \ldots,$ $a_{2009} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2009}, a_{2010} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2009} - \frac{1}{2010}$ записали у порядку зростання.

З'ясуйте яке число у цій розстановці записане:

а) на 1000-му місці;
б) на 2000-му місці?

Відповідь: ***а)*** a_{2000}; ***б)*** a_{21}?

Розв'язання. Неважко побачити, що кожне наступне число потрапляє проміж двома попередніми числами (рис.2).

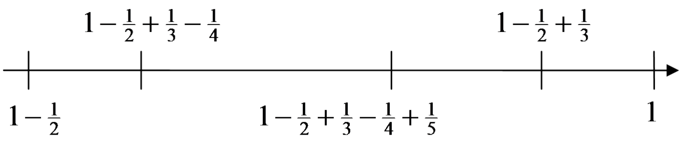

Рис.2

Зрозуміло, що виконуються такі нерівності: для парного $n = 2k$:

$$a_{2k-2} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots - \frac{1}{2k-2} < a_{2k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots - \frac{1}{2k-2} + \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} <$$

$$< a_{2k-1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots - \frac{1}{2k-2} + \frac{1}{2k-1},$$

для непарного $n = 2k+1$:

$$a_{2k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots - \frac{1}{2k} < a_{2k+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots + \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k+1} <$$

$$< a_{2k-1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots + \frac{1}{2k-1}.$$

Тому усі числа будуть йти таким чином у порядку зростання:

$$a_2, a_4, \ldots, a_{2010}, a_{2009}, a_{2007}, \ldots, a_3, a_1.$$

Тепер вже неважко з'ясувати, що на 1000-му місці стоїть a_{2000}, а на 2000-му місці стоїть a_{21}.

2. (**Петровський Дмитро**) Нехай $P(x), Q(x)$ та $R(x)$ – многочлени, при цьому $Q(x)$ та $R(x)$ набувають лише невід'ємних значень. Відомо, що рівняння

$$P(x) + \sqrt{Q(x)} + \sqrt{Q(x) + \sqrt{R(x)}} = 0$$

має нескінченно багато коренів. Чи випливає звідси, що будь-яке дійсне число є коренем данного рівняння?

Відповідь: Не обов'язково.

Розв'язання. Покажемо, що це не так, для чого наведемо відповідний приклад. $P(x) = x$, $Q(x) = \frac{1}{4}x^2$, $\sqrt{Q(x)} = \frac{1}{2}|x|$, $R(x) = 0$. Тоді $\sqrt{Q(x) + \sqrt{R(x)}} = \frac{1}{2}|x|$ і маємо: $P(x) + \sqrt{Q(x)} + \sqrt{Q(x) + \sqrt{R(x)}} = x + |x| = \begin{cases} 2x, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$ Таким чином ліва частина не дорівнює тотожньо нулеві, але рівняння має нескінченну кількість розв'язків.

Зауважимо, що це не єдиний приклад, можна вибрати $Q(x) = \frac{1}{8}x^2$, $R(x) = \left(\frac{1}{8}x^2\right)^2$.

3. (**Нагель Ігор**) Дано гострокутний трикутник ABC. На серединних перпендикулярах до його сторін AB і BC відповідно відмітили точки P і Q, а M і N – їх проекції на сторону AC (дивись рис.3). З'ясувалося, що $2MN = AC$. Доведіть, що описане коло трикутника PBQ проходить через центр описаного кола трикутника ABC.

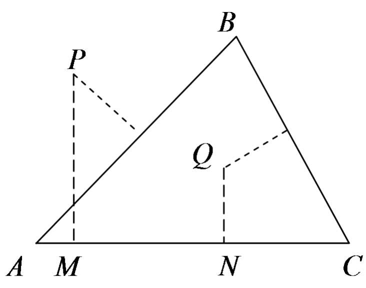

Рис.3

Розв'язання. Нехай O – точка перетину серединних перпендикулярів до сторін AB і BC. Тоді O – центр описаного кола трикутника ABC. Нехай ці серединні перпендикуляри перетинають сторони AB і BC в точках K і L відповідно. Тоді KL – середня лінія трикутника ABC. За властивістю середньої лінії одержуємо, що $KL \parallel AC$ і $2KL = AC$. Тому, $MKLN$ – паралелограм, бо $KL \parallel MN$ і $KL = MN$. Оскільки $PM \perp AC$ і $QN \perp AC$, то $PN \parallel QN$. Так як $PM \parallel QN$ і $KM \parallel LN$, то $\angle PMK = \angle QNL$ (рис.4).

Точки A і P видно із точок K і M під прямими кутами, тому точки P, K, M і A лежать на колі з діаметром PA. Аналогічно доводиться, що точки Q, N, C і L лежать на колі з діаметром CQ, а точки O, K, B і L лежать на колі з діаметром BO. Звідси випливає, що $\angle PAK = \angle PMK = \angle QNL = \angle QCL$.
Оскільки точки P і Q лежать на серединних перпендикулярах до сторін AB і BC, то трикутники APB і BQC – рівнобедрені. Звідси випливає, що $\angle PBA = \angle PAB = \angle QCB = \angle QBC$.
Таким чином, $\angle PBQ = \angle KBL = 180^\circ - \angle KOL = 180^\circ - \angle POQ$, тобто точки P, B, Q, O належать одному колу, що і треба було довести.

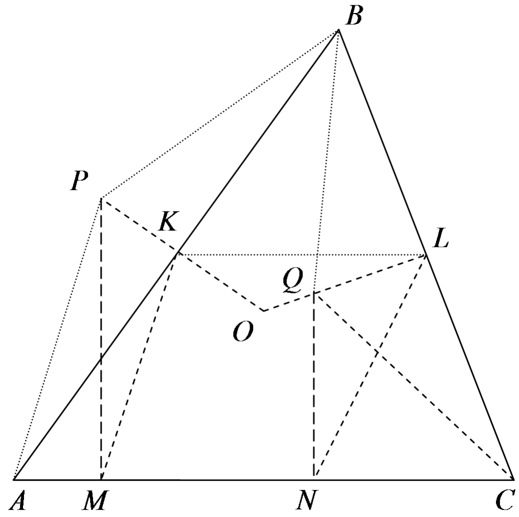

Рис.4

4. (**Сердюк Назар**) Натуральні числа a, b такі, що число $m = a+b+2\sqrt{ab+1}$ є натуральним. Доведіть, що m – складене число.

Розв'язання. Припустимо що $p = a+b+2\sqrt{ab+1}$ є простим для деяких натуральних a, b. Тоді $ab+1$ це квадрат цілого числа, отже числа a та b різні. За нерівністю Коші маємо $a+b \geq 2\sqrt{ab}$. Крім того $2\sqrt{ab}+1 > 2\sqrt{ab+1} \Rightarrow a+b \geq 2\sqrt{ab+1}$. Число p непарне бо воно більше 2, отже $a+b-2\sqrt{ab+1}$ це натуральне число. З рівності $(a+b+2\sqrt{ab+1})(a+b-2\sqrt{ab+1}) = (a-b+2)(a-b-2) \neq 0$ випливає, що одне з чисел $a-b-2$, $a-b+2$ має ділитися на p, проте кожне з них не перевищує за модулем $a+b+2$, що менше за p. Отримана суперечність доводить задачу.

Розв'язання. **(Атамась Володимир).** З умови випливає, що $2\sqrt{ab+1}$ – натуральне число. Число $z = \sqrt{ab+1}$ не може бути не натуральним, бо інакше $ab+1$ було б дробовим, а це неможливо, бо a, b – натуральні. Тоді $b = \frac{z^2-1}{a} = \frac{(z-1)(z+1)}{a}$. Це означає, що a можна розкласти на множники $a = a_1 a_2$ так, що $z-1$ ділиться на a_1, а $z+1$ – на a_2. $m = a + \frac{(z-1)(z+1)}{a} + 2z = \frac{(a+z)^2-1}{a} = \frac{(a+z-1)(a+z+1)}{a} = \frac{a+z-1}{a_1}\frac{a+z+1}{a_2}$. Обидва множники $\frac{a+z-1}{a_1}$ та $\frac{a+z+1}{a_2}$ – натуральні та більші одиниці, а тому m – складене.

10 клас

1. Парабола $y = ax^2+bx+c$ проходить через точки $A(-2, 1)$ та $B(2, 9)$ і не має спільних точок з віссю абсцис. Знайти усі значення які може приймати абсциса вершини параболи.

Відповідь: $(-4, -1)$.

Розв'язання. Запишемо умови, що парабола проходить через задані точки:

$$\begin{cases} 4a-2b+c=1, \\ 4a+2b+c=9, \end{cases}$$

звідки маємо, що $b=2$ та $4a+c=5$. З умови, що парабола не має дійсних коренів, маємо $D = b^2-4ac = 4-4a(5-4a) < 0$, звідки одержуємо умову на a: $\frac{1}{4} < a < 1$. Залишається розв'язати відповідну нерівність для абсциси вершини. Оскільки $x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{a} \Rightarrow x_v \in (-4, -1)$.

2. (**Анікушин А., Рубльов Б.**) Для деяких дійсних чисел x, y числа x^2+y^2, x^3+y^3 та x^4+y^4 раціональні. Чи обов'язково число $x+y$ також раціональне?

Відповідь: Число обов'язково раціональне.

Розв'язання. Розглянемо спочатку випадок $xy=0$, тобто припустимо, що, наприклад, $y=0$. Якщо x^2 та x^3 – раціональні, то раціональним також є й число $\frac{x^3}{x^2}=x$.

Нехай тепер $xy\neq 0$. З рівності $(x^2+y^2)^2=(x^4+y^4)+2x^2y^2$ маємо, що $(xy)^2\in\mathbb{Q}$. Але тоді $(x^6+y^6)=(x^2+y^2)\left((x^4+y^4)-(xy)^2\right)\in\mathbb{Q}$. Тому з рівності $(x^3+y^3)^2=(x^6+y^6)+2(xy)^3$ випливає, що $(xy)^3\in\mathbb{Q}$, але тоді вже й $\frac{(xy)^3}{(xy)^2}=xy\in\mathbb{Q}$, і остаточно $x+y=\frac{x^3+y^3}{(x^2+y^2)-xy}\in\mathbb{Q}$, що й треба було довести.

3. (**Рубльов Богдан**) Андрій має картки, які з одного боку однакові, а на іншій стороні записані числа $1,3,5,\ldots,2009$, а Леся – такі ж самі картки тільки з числами $2,4,6,\ldots,2010$. Леся викладає усі свої картки в один ряд числами донизу (тобто значень чисел спочатку не видно), після цього Андрій викладає свої картки поверх Лесиних. Таким чином утворюється 1005 пар карток. Після цього числа у парах порівнюють і тому з гравців, у кого число більше, нараховується 1 бал. Андрію відомо, що Леся викладає свої картки з числами у порядку зростання зліва направо, починаючи з деякого місця. Коли вона доходить до останньої позиції, то далі знову починає викладати картки у порядку зростання з самої лівої позиції. Наприклад: $20,22,24,\ldots,2010,2,4,\ldots,18$. Андрій прагне набрати якомога більше очок. Яку кількість очок він може собі забезпечити, яким би не виявились розташування карток з числами у Лесі?

Відповідь: Андрій може набрати 502 очки.

Розв'язання. Для цього Андрій викладає свої картки справа наліво у такому порядку: $2009,2007,2005,\ldots,3,1$. Покажемо, що як би не викладала свої картки Леся Андрій набере 502 очки. Зробимо це методом математичної індукції. Усього у Лесі є 1005 варіантів викладання карток (кожний варіант зображений у відповідному рядку)

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 & 2008 & 2010 \\ 4 & 6 & 8 & 2010 & 2 \\ 6 & 8 & 10 & 2 & 4 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 2008 & 2010 & 2 & 2004 & 2006 \\ 2010 & 2 & 4 & 2006 & 2008 \end{vmatrix}$$

Якщо порівняти варіант Андрія з першим рядком, то бачимо, що треба порівняти такі розклади: $2,4,\ldots,2010$ та $2009,2007,2005,\ldots,3,1$. Як бачимо Андрій набирає рівно 502 очки у перших стовпчиках. Це – база індукції. Припустимо, що у k-му рядку Андрій набирає 502 очки. Тоді вони набираються так: частина у перших стовпчиках, а решта – у останніх. Разом – 502.

Покажемо, що у наступному $(k+1)$-му рядку – їх буде стільки ж. У порівнянні з k-м рядком, буде зменшення на 1 очко на початку рядка та збільшення на 1 очко наприкінці.

Тепер покажемо, що кращого результату Андрій досягти не зможе. Оскільки Леся знає розташування карток Андрія вона вибере той рядок із можливих який дає максимальну кількість очок саме їй. Підрахуємо, а скільки усього балів може набрати Андрій при усіх можливих 1005 Лесиних розкладах карт. Розташуємо карти Андрія під низом наведеної таблички 1005×1005.

Підрахуємо загальну кількість балів: там, де стоїть число 2009, Андрій набере 1004 очки (програє лише тому рядку, де у Лесі – 2010), Андрійкове число 2007 загалом набере 1003 очко, і т.д., число 1 набере 0 очок. Таким чином, разом буде набрано $1004+1003+\ldots+1+0=\frac{1005\cdot 1004}{2}=502\cdot 1005$ очок.

Тому в середньому Андрій набирає 502 очки у кожній з 1005 варіантів. Тобто, якщо існують розклади, при якому хоч у одному рядку Андріїв виграш більше 502 очок, то існують варіанти, при яких виграш менший, а тому Леся може вибрати саме цей розклад. Таким чином наведений вище варіант для Андрія – найкращий.

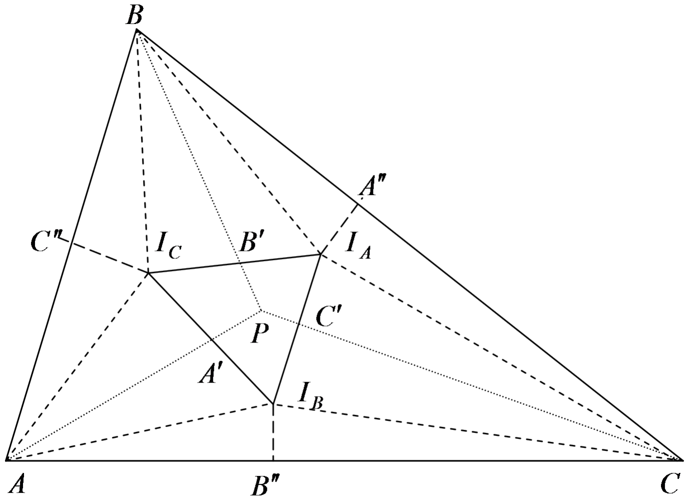

Рис.5

4. (**Білокопитов Євген**) Точка P належить трикутнику ABC. Центри вписаних кіл у трикутники PBC, PAC, PAB позначимо через I_A, I_B, I_C відповідно. Позначимо через I_P – центр вписаного кола у трикутник $I_AI_BI_C$. Довести, що для точки P, яка задовольняє умову $I_P = P$, виконуються рівності:

$$AP - BP = AC - BC,\ BP - CP = BA - CA,\ CP - AP = CB - AB.$$

Розв'язання. Позначимо точки $A' = AP \cap I_BI_C, B' = BP \cap I_AI_C, C' = CP \cap I_BI_A$ (рис.5). Оскільки $I_P = P$, то I_AP є бісектрисою кутів $\angle BPC$ та $\angle I_BI_AI_C$, тому дві пари прямих I_AI_B, I_AI_C, а також BP, CP симетричні відносно прямої I_AP. Тому $\angle(I_AI_B, CP) = \angle(BP, I_AI_C)$ (орієнтовні кути). Аналогічно $\angle(I_BI_C, AP) = \angle(CP, I_BI_A)$, $\angle(I_CI_A, BP) = \angle(AP, I_CI_B)$, отже $\angle(I_AI_B, CP) = \angle(BP, I_AI_C) = -\angle(AP, I_CI_B) = \angle(CP, I_BI_A) \Rightarrow CP \perp I_BI_A$.

А оскільки основа перпендикуляру, опущеного з інцентра трикутника на його сторону, є точкою дотику із цією стороною вписаного кола, то вписані кола в $\triangle PAC$ та PBC дотикаються прямої CP в C', отже ці два кола дотикаються і між собою. Аналогічно між собою в B' дотикаються вписані кола $\triangle PAB, \triangle PBC$ та PB, а в A' – вписані кола $\triangle PAC, \triangle PAB$. Нехай A'' – точка дотику вписаного кола $\triangle PBC$ та BC. Аналогічно визначаються точки B'', C''. Тоді

$$AP + BC = PA' + AA' + BA'' + A''C = PB' + AB'' + BB' + B''C = BP + AC.$$

Аналогічно $AP + BC = CP + AB$. Отже P – така точка, що $AP - BP = AC - BC, BP - CP = BA - CA, CP - AP = CB - AB$, що й треба було довести.

11 клас

1. (**Лейфура Валентин**) При яких дійсних числах a і b найбільше з чисел $3a^2 + 2b$ і $3b^2 + 2a$ приймає найменше значення?

Відповідь: $a = b = -\frac{1}{3}$.

Розв'язання. Нехай $M(a,b) = \max\{3a^2 + 2b, 3b^2 + 2a\}$. Тоді $M(a,b) \geq 3a^2 + 2b$ і $M(a,b) \geq 3b^2 + 2a$. Звідки випливає, що $2M(a,b) \geq 3a^2 + 2b + 3b^2 + 2a$. Таким чином,

$$\frac{2}{3}M(a,b) + \frac{2}{9} \geq \left(a + \frac{1}{3}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{3}\right)^2 \geq 0,$$

тобто $M(a,b) \geq -\frac{1}{3}$, причому $M(a,b) = -\frac{1}{3}$, якщо $a = b = -\frac{1}{3}$.

2. (**Сенін Віталій**) Розв'яжіть в цілих невід'ємних числах k, n рівняння

$$2^{2k+1} + 9 \cdot 2^k + 5 = n^2.$$

Відповідь: $k = 0, n = 4$.

Розв'язання. Розглянемо це рівняння по модулю 8. При $k \geq 3$ ліва частина кратна 8, а права частина на 8 не ділиться. Таким чином, залишається розглянути лише випадки $k \in \{0, 1, 2\}$.

При $k = 0$ маємо рівняння $n^2 = 16$ звідки $n = 4$.

При $k = 1$ маємо рівняння $n^2 = 31$, розв'язків немає.

При $k = 2$ маємо рівняння $n^2 = 73$, розв'язків немає.

3. (**Сердюк Назар**) Всередині паралелограма $ABCD$ відмічені точки P та Q, що симетричні відносно точки перетину діагоналей паралелограма. Доведіть, що кола описані навколо трикутників ABP, CDP, BCQ та ADQ мають спільну точку.

Розв'язання. Позначимо через X – другу точку перетину кіл, що описані навколо $\triangle ADQ$ та BCQ, QE – промінь, який має однаковий напрямок з променем CB (рис.6).

Тоді $\angle EQB = \angle QBC$, $\angle EQA = \angle QAD$ $\Rightarrow AQB = \angle QAD + \angle QBC = 180° - \angle QXD + 180° - \angle QXC = \angle CXD$. Крім того, $\angle AQB = \angle CPD$, бо трикутники AQB та CPD центрально симетричні відносно центра паралелограма. Отже точки D, P, X, C лежать на одному колі. Аналогічно точки A, P, X, B також лежать на одному колі, тобто усі 4 кола мають спільну точку X, що й треба було довести.

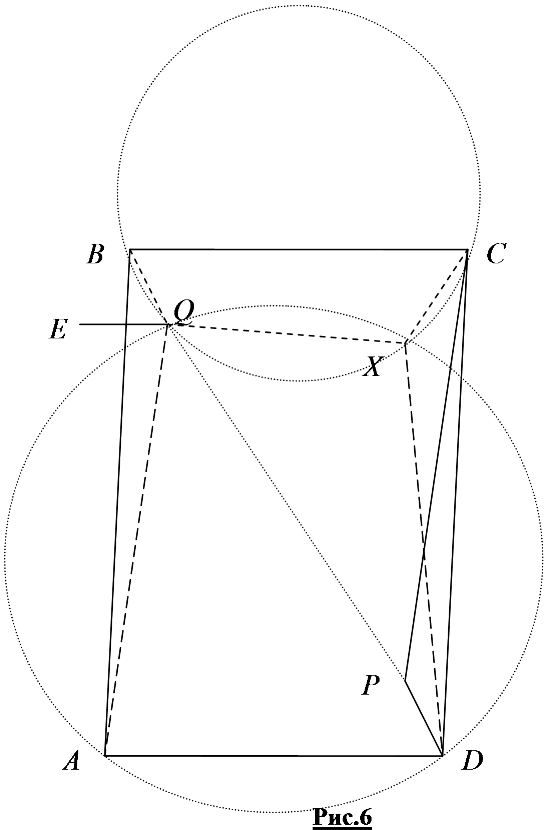

Рис.6

Це доведення спирається на конкретне розташування точок, а тому для повного доведення ще треба розглянути принаймні 3 випадки. Цього недоліку позбавлене інше розв'язання, яке ми тут наводимо. Воно спирається на орієнтовані кути.

Для визначених вище позначень маємо:
$\angle(QB; QA) = \angle(QB; BC) + \angle(BC; QA) = \angle(QB; BC) + \angle(AD; QA) = \angle(QX; XC) + \angle(DX; XQ) = \angle(DX; XC)$. Далі завершення співпадає з попереднім, оскільки, $\angle(QB; QA) = \angle(PD; PC)$ бо трикутники AQB та CPD центрально симетричні відносно центра паралелограма. Отже точки D, P, X, C лежать на одному колі. Аналогічно точки A, P, X, B також лежать на одному колі, тобто усі 4 кола мають спільну точку X, що й треба було довести.

4. (**Анікушин А., Рубльов Б.**) Відомо, що число α таке ірраціональне число, для якого існують числа x, y, такі що $x + y = \alpha$, а $x^k + y^k$ є раціональним числом для усіх натуральних k від 2 до n. Для якого найбільшого n це можливо?

Відповідь: $n = 3$.

<u>Розв'язання</u>. Покажемо, що при $n = 4$ це неможливе.

Розглянемо спочатку випадок $xy = 0$, тобто припустимо, що $y = 0$. При $n = 2$ це можливо, як приклад $x = \sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ $x^2 = 2 \in \mathbb{Q}$. Але, якщо x^2 та x^3 – раціональні, то раціональним також є й число $\frac{x^3}{x^2} = x$ також раціональне.

Нехай тепер $xy \neq 0$. При $n = 4$ маємо, що $x^2 + y^2, x^3 + y^3$, та $x^4 + y^4$ – раціональні. З рівності $(x^2 + y^2)^2 = (x^4 + y^4) + 2x^2y^2$ маємо, що $(xy)^2 \in \mathbb{Q}$. Але тоді $(x^6 + y^6) = (x^2 + y^2)\left((x^4 + y^4) - (xy)^2\right) \in \mathbb{Q}$, тоді з рівності $(x^3 + y^3)^2 = (x^6 + y^6) + 2(xy)^3$ маємо, що $(xy)^3 \in \mathbb{Q}$, але тоді вже й $\frac{(xy)^3}{(xy)^2} = xy \in \mathbb{Q}$, і остаточно $x + y = \frac{x^3+y^3}{(x^2+y^2)-xy} = \alpha \in \mathbb{Q}$ – одержали суперечність.

Покажемо, що при $n = 3$ відповідні числа існують. Позначимо через $a = x+y$, $b = xy$. $x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy = (a - 2b) \in \mathbb{Q}$, $x^3 + y^3 = (x+y)\left((x+y)^2 - 3xy\right) = a(a^2 - 3b) \in \mathbb{Q}$. Підберемо такі ірраціональні a, b, щоб це виконувалось. Нехай $(a^2 - 2b) = p$, $a(a^2 - 3b) = q$, тоді $b = \frac{1}{2}(a^2 - p) \Rightarrow a(3p - a^2) = 2q$, таким чином маємо для a таке кубічне рівняння: $a^3 - 3ap + 2q = 0$. Підберемо деяке ірраціональне a, наприклад $a = 2 - \sqrt{2}$, далі послідовно обчислюємо p і q. Підставляємо у кубічне рівняння і маємо, що $p = \frac{14}{3}$, $q = 4$. Далі маємо, що $b = \frac{2}{3} - 2\sqrt{2}$, тобто для знаходження x, y маємо таку систему: $\begin{cases} x + y = 2 - \sqrt{2}, \\ xy = \frac{2}{3} - 2\sqrt{2}, \end{cases}$

тобто вони є коренями такого квадратного рівняння: $t^2 - at + b = 0$. Обчислимо його дискримінант, щоб переконатись, що ці числа є дійсними: $D^2 = a^2 - 4b = \frac{10}{3} + 4\sqrt{2} > 0$.

Остаточно переконаємось, що $x^2 + y^2 = (a^2 - 2b) = \frac{14}{3} = p$ та $x^3 + y^3 = a(a^2 - 3b) = 4 = q$.